# ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΜΕΡΟΣ Δ

# Πολυώνυμα

## Ι. Ορισμός

Καλούμε **μονώνυμο** του $x$ κάθε παράσταση της μορφής $ax^n$, όπου $a$ είναι ένας πραγματικός αριθμός και $n$ ένας φυσικός αριθμός.

Καλούμε **πολυώνυμο** του $x$ κάθε παράσταση της μορφής $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, όπου $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $n$ ένας φυσικός αριθμός. Τα μονώνυμα $a_n x^n, a_{n-1}x^{n-1}, \cdots, a_1 x, a_0$ καλούνται **όροι** του πολυωνύμου και οι αριθμοί $a_n$, $a_{n-1}$, $\cdots$, $a_1$, $a_0$ καλούνται **συντελεστές** του πολυωνύμου. Συγκεκριμένα, ο όρος $a_0$ καλείται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου, ενώ ο όρος $a_n x^n$ καλείται **μεγιστοβάθμιος** όρος του πολυωνύμου.

**Μηδενικό** πολυώνυμο καλείται το πολυώνυμο $P(x) = 0$.

Καλούμε **βαθμό** του πολυωνύμου $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ τον φυσικό αριθμό $n$, δηλαδή τον μεγαλύτερο εκθέτη των όρων του. Συνήθως συμβολίζουμε τον βαθμό ενός πολυωνύμου $P(x)$ ως $degP(x) = n$. Το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό (δεν ορίζεται βαθμός). Τα σταθερά πολυώνυμα, δηλαδή τα πολυώνυμα της μορφής $P(x) = a_0$, έχουν βαθμό ίσο με το 0.

## ΙΙ. Διαίρεση Πολυωνύμων

Παρόμοια με τη διαίρεση των φυσικών αριθμών, μπορεί να οριστεί και η διαίρεση πολυωνύμων. Ας δούμε τον αλγόριθμό μέσα από ένα παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κάνουμε τη διαίρεση: $(2x^3 - x^2 + 3x - 5):(x-2)$. Ονομάζουμε το πολυώνυμο $\Delta(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 5$ ως διαιρέτη και το πολυώνυμο $\delta(x) = x - 2$ ως διαιρετέο. Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{2x^3} - x^2 + 3x - 5 & \mathbf{x} - 2 \\ \cline{2-2} & \mathbf{2x^2} \end{array}$$

Αρχικά διαιρούμε τον μεγιστοβάθμιο όρο του διαιρετέου με τον μεγιστοβάθμιο όρο του διαιρέτη. Επομένως $\mathbf{2x^3 : x = 2x^2}$. Το αποτέλεσμα μπαίνει στη θέση του πηλίκου.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - x^2 + 3x - 5 & x - 2 \\ \cline{2-2} \mathbf{-2x^3 + 4x^2} & 2x^2 \\ \cline{1-1} \quad +3x^2 + 3x - 5 & \end{array}$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε το $\mathbf{2x^2}$ με το διαιρέτη,

$$\mathbf{2x^2} \cdot (x-2) = 2x^3 - 4x^2$$

και βάζουμε το αποτέλεσμα κάτω από τον Διαιρετέο με αντίθετο πρόσημο.

Τέλος, προσθέτουμε και βρίσκουμε το «νέο» Διαιρέτη.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 - \ \ x^2 + 3x - 5 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-2x^3 + 4x^2 \phantom{+ 3x - 5} & 2x^2 + 3x \\ \cline{1-1}
+3x^2 + 3x - 5 &
\end{array}
$$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για το νέο διαιρέτη $3x^2 + 3x - 5$.

Εκτελώ τη διαίρεση $\mathbf{3x^2 : x = 3x}$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 - \ \ x^2 + 3x - 5 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-2x^3 + 4x^2 \phantom{+ 3x - 5} & 2x^2 + \mathbf{3x} \\ \cline{1-1}
+3x^2 + 3x - 5 & \\
\mathbf{-3x^2 + 6x} \phantom{- 5} & \\ \cline{1-1}
\mathbf{+9x - 5} &
\end{array}
$$

Πολλαπλασιάζουμε το $\mathbf{3x}$ με τον διαιρέτη $x - 2$ και βάζουμε το αποτέλεσμα κάτω από τον διαιρετέο

Προσθέτουμε και παίρνουμε το «νέο» διαιρεταίο.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 - \ \ x^2 + 3x - 5 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-2x^3 + 4x^2 \phantom{+ 3x - 5} & 2x^2 + 3x + 9 \\ \cline{1-1}
+3x^2 + 3x - 5 & \\
-3x^2 + 6x \phantom{- 5} & \\ \cline{1-1}
+9x - 5 & \\
\mathbf{-9x + 18} & \\ \cline{1-1}
\mathbf{+13} &
\end{array}
$$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία άλλη μια φορά

Η διαδικασία τερματίζεται όταν ο νέος διαιρεταίος έχει μικρότερο βαθμό από τον διαιρέτη. Σε αυτή την περίπτωση, σύμφωνα με την ταυτότητα της διαίρεσης, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x) ,$$

δηλαδή ο Διαιρετός ισούται με το γινόμενο του διαιρέτη επί το πηλίκο συν το υπόλοιπο. Στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε

$$2x^3 - \ x^2 + 3x - 5 = (x - 2) \cdot (2x^2 + 3x + 9) + 13.$$

**Παράδειγμα 1:** Να γίνει η διαίρεση $(4x^4 + x^2 - 3x - 1) : (2x^2 + x)$.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να δούμε ότι το πηλίκο της διαίρεσης είναι $2x^2 - x + 1$ και το υπόλοιπο είναι ίσο με $-4x - 1$.

## III. Σχήμα Horner

Η διαίρεση με πρωτοβάθμιους παράγοντες μπορεί να γίνει ευκολότερα με βάση τον αλγόριθμο που ονομάζεται σχήμα Horner. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κάνουμε τη διαίρεση $(2x^3 - x^2 + 3x - 5) : (x - 2)$, όπως και πριν.

Κατασκευάζουμε έναν πίνακα με τους συντελεστές του Διαιρετέου και τη ρίζα του διαιρέτη (δηλαδή το 3):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $-1$ | 3 | $-5$ | 2 |
| | | | | |
| | | | | |

Στη συνέχεια κατεβάζουμε τον μεγιστοβάθμιο όρο (αυτόν που βρίσκεται αριστερότερα) στην τρίτη γραμμή γραμμή:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $-1$ | 3 | $-5$ | 2 |
| | | | | |
| **2** | | | | |

Ακολούθως, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό που κατεβάσαμε με τον αριθμό 2 (δηλαδή τη ρίζα του διαιρέτη). Το αποτέλεσμα τοποθετείται στην δεύτερη γραμμή κάτω από το -1.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $-1$ | 3 | $-5$ | 2 |
| | 4 | | | |
| **2** | | | | |

Και προσθέτουμε τους αριθμούς της πρώτης και δεύτερης γραμμής.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $-1$ | 3 | $-5$ | 2 |
| | 4 | | | |
| **2** | **3** | | | |

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $-1$ | 3 | $-5$ | 2 |
| | 4 | 6 | | |
| **2** | **3** | **9** | | |

Και πάλι, μέχρι να φτάσουμε στην τελευταία στήλη.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | −1 | 3 | −5 | 2 |
| | 4 | 6 | 18 | |
| **2** | **3** | **9** | **13** | |

Οι αριθμοί που προκύπτουν στην τελευταία γραμμή είναι

- οι συντελεστές του πηλίκου, το οποίο έχει βαθμό κατά ένα μικρότερο του Διαιρετέου. Επομένως το πηλίκο θα είναι: $\pi(x) = 2x^2 + 3x + 9$ και
- η τιμή που βγάζει ο διαιρέτης αν στη θέση του x βάλουμε τον αριθμό 2, δηλαδή $\Delta(2) = 13$.

**Προφανώς, αν ο τελευταίος αριθμός είναι το 0, τότε ο αριθμός που μπαίνει πάνω δεξιά (η ρίζα του διαιρέτη) θα είναι ρίζα του Διαιρετέου. Είναι επίσης το υπόλοιπο της διαίρεσης!**

## IV. Βασικά Θεωρήματα

1. Το **υπόλοιπο της διαίρεσης** ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το πρωτοβάθμιο πολυώνυμο $x - \rho$ είναι ίσο με $\upsilon = P(\rho)$.
2. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει **παράγοντα** το $x - \rho$, αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.
3. (Θεώρημα ακέραιων ριζών) Ένας ακέραιος αριθμός $\rho$ αποτελεί **ρίζα** ενός πολυωνύμου $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ , αν και μόνο αν είναι **διαιρέτης του σταθερού όρου** $a_0$ του πολυωνύμου.

## V. Επίλυση εξισώσεων με πολυώνυμα

Καταρχάς πρέπει να τονίσουμε ότι δεν μπορεί να λυθεί κάθε πολυωνυμική εξίσωση. Γενικά όμως έχουμε δύο βασικές μεθοδολογίες: (α) την παραγοντοποίηση και (β) τον έλεγχο για ακέραιες ρίζες.

**Παράδειγμα 2:** Να λύσετε την εξίσωση $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$.

Έχουμε διαδοχικά:

$$x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+2) - 9(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2 - 9) = 0$$

Επομένως, $x = -2$, ή $x^2 = 9$, δηλαδή $x = -2$, ή $x = 3$, ή $x = -3$.

**Παράδειγμα 3:** Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 3x^3 - 6x + 4 = 0$.

Έχουμε διαδοχικά: $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 4 - 3x^3 + 6x = 0$

$$\Leftrightarrow \ (x^2 - 2)(x^2 + 2) - 3x(x^2 - 2) = 0 \ \Leftrightarrow \ (x^2 - 2)(x^2 + 2 - 3x) = 0$$

Επομένως, θα έχουμε είτε $x^2 - 2 = 0$, είτε $x^2 + 2 - 3x = 0$. Και οι δύο εξισώσεις είναι δευτέρου βαθμού οπότε μπορούν να λυθούν εύκολα με τη μέθοδο της διακρίνουσας. Άρα $x = -2$, ή $x = 2$, ή $x = 1$.

**Παράδειγμα 3:** Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$.

Στην παραπάνω εξίσωση δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε (εύκολα) τη μέθοδο της παραγοντοποίησης. Εναλλακτικά, θα εφαρμόσουμε τη μεθοδολογία των ακέραιων ριζών. Σύμφωνα με το θεώρημα των ακέραιων ριζών, αν η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες ρίζες τότε αυτές θα είναι διαιρέτες του 2. Επομένως, οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης θα είναι οι $+1, -1, +2, -2$. Μπορούμε να κάνουμε το σχήμα Horner για αυτές τις ρίζες μέχρι να βρούμε υπόλοιπο το 0.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $-3$ | 1 | 2 | 1 |
| | 1 | $-2$ | $-1$ | |
| **1** | $-2$ | $-1$ | **1** | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $-3$ | 1 | 2 | $-1$ |
| | $-1$ | 4 | $-5$ | |
| **1** | $-4$ | 5 | $-3$ | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $-3$ | 1 | 2 | 2 |
| | 2 | $-2$ | $-2$ | |
| **1** | $-1$ | $-1$ | 0 | |

Βρήκαμε λοιπόν ότι η τιμή 2 είναι ρίζα της εξίσωσης. Επομένως το πολυώνυμο μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2 = (x - 2) \cdot (x^2 - x - 1) = 0.$$

Άρα θα έχουμε είτε $x = 2$ ή $x^2 - x - 1 = 0$. Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = 5$ και ρίζες $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

## V. Επίλυση ανισώσεων με πολυώνυμα

Για να επιλύσουμε μια πολυωνυμική ανίσωση πρέπει αναγκαστικά να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο έτσι ώστε να έχει παράγοντες το πολύ μέχρι δευτέρου βαθμού. Στη συνέχει κάνουμε τον πίνακα προσήμων και βρίσκουμε το συνολικό πρόσημο του πολυωνύμου. Θα δούμε τη διαδικασία μέσω ενός παραδείγματος.

**Παράδειγμα 4:** Να λύσετε την ανίσωση $x^3 - 3x^2 + x + 2 \geq 0$.

Όπως είδαμε, το παραπάνω πολυώνυμο μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2 = (x - 2) \cdot (x^2 - x - 1).$$

Επομένως, θα πρέπει να βρούμε το πρόσημο κάθε παράγοντα και στη συνέχεια το πρόσημο του γινομένου $(x-2)\cdot(x^2-x-1)$. Τα πρόσημα δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

$-\infty$ $\qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $\qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $\qquad 2$ $\qquad +\infty$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | - | - | - | + |
| $x^2-x-1$ | + | - | + | + |
| $(x-2)\cdot(x^2-x-1)$ | - | + | - | + |

Αφού θέλουμε $P(x) \geq 0$, οι λύσεις θα είναι $x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup [2, +\infty)$.

## Ασκήσεις

1. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(a^2-1)x^4-(a^2-3a+2)x^3-2x^2+4x+1$. Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου α ώστε το πολυώνυμο *P(x)* να είναι 3ου βαθμού.

2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(a^2-3a+2)x^4-(a^2-4)x^3-ax^2+4x+1$. Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου α ώστε το πολυώνυμο *P(x)* να είναι 3ου βαθμού.

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+x^2-13x+6$. Να λυθεί η εξίσωση *P(x)=0*. Στη συνέχεια λύστε την ανίσωση $P(x)\leq 0$.

4. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-3x^2+4$. Να λυθεί η εξίσωση *P(x)=0*. Στη συνέχεια λύστε την ανίσωση $P(x)>0$.

5. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-3x+2$. Να λυθεί η εξίσωση *P(x)=0*. Στη συνέχεια λύστε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

6. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\left(\sqrt{2}-1\right)x^2-\left(4+\sqrt{2}\right)x+4$. Να λυθεί η εξίσωση *P(x)=0*. Στη συνέχεια λύστε την ανίσωση $P(x)<0$.

7. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+ax^2-bx+6$. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων $a,b$, έτσι ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 3.

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\left(a-2b\right)x^2-\left(a+b\right)x+8$. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων $a,b$, έτσι ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζα τον αριθμό -2 και η διαίρεση του *P(x)* με το πολυώνυμο $x-2$ δίνει υπόλοιπο τον αριθμό -8.

9. Να λύσετε τις ανισώσεις α) $\frac{x}{3x-5} \leq \frac{2}{x-1}$, β) $\frac{x^2-3x+10}{x-1}+2 \leq 0$