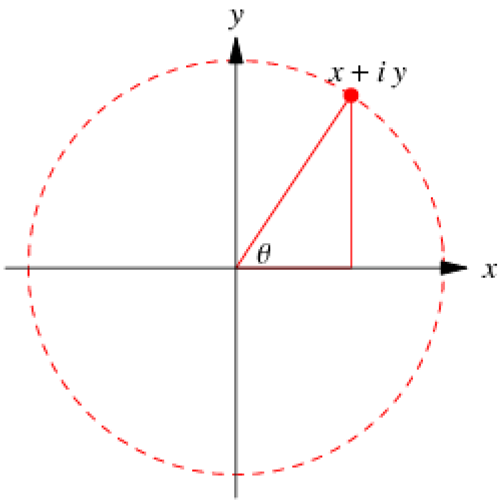
ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ



$$e^{i\pi} = -1$$

ΜΕΡΟΣ Ι
ΟΡΙΣΜΟΣ - ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

Α. Ορισμός

Ο ορισμός του συνόλου των Μιγαδικών αριθμών (ℂ) βασίζεται στις εξής παραδοχές:

1. Υπάρχει ένας αριθμός i για τον οποίο ισχύει $\boxed{i^2 = -1}$.

2. Το σύνολο C έχει ως στοιχεία

- Όλους τους πραγματικούς αριθμούς,
- Όλους τους φανταστικούς αριθμούς, δηλαδή τα γινόμενα $\beta \cdot i$, όπου ο β είναι ένας πραγματικός αριθμός,
- Όλα τα αθροίσματα της μορφής $\boxed{\alpha + \beta \cdot i}$, με α, β πραγματικούς αριθμούς.

3. **Ισότητα** δύο μιγαδικών αριθμών: Δύο μιγαδικού αριθμοί είναι ίσοι αν και μόνο αν τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη τους είναι ίσα αντιστοίχως.

$$\alpha + \beta \cdot i = \gamma + \delta \cdot i \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = \delta \end{cases}, \qquad \alpha + \beta \cdot i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

4. Το **άθροισμα** δύο μιγαδικών αριθμών ορίζεται ως εξής:

$$(\alpha + \beta \cdot i) + (\gamma + \delta \cdot i) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) \cdot i,$$
$$(\alpha + \beta \cdot i) - (\gamma + \delta \cdot i) = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta) \cdot i.$$

5. Το **βαθμωτό γινόμενο** ενός πραγματικού και ενός μιγαδικού ορίζεται ως εξής:

$$\lambda(\alpha + \beta \cdot i) = \lambda\alpha + \lambda\beta \cdot i.$$

6. Το **γινόμενο** δύο μιγαδικών αριθμών ορίζεται ως εξής:

$$(\alpha + \beta \cdot i) \cdot (\gamma + \delta \cdot i) = \alpha\gamma + \alpha\delta \cdot i + \beta\gamma \cdot i + \beta\delta \cdot i^2 = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\beta\gamma + \alpha\delta) \cdot i.$$

7. Ο **αντίστροφος** ενός μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + \beta \cdot i$ ορίζεται ως εξής:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\alpha + \beta \cdot i} = \frac{\alpha - \beta \cdot i}{(\alpha + \beta \cdot i)(\alpha - \beta \cdot i)} = \frac{\alpha - \beta \cdot i}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} i.$$

8. Η **διαίρεση** δύο μιγαδικών αριθμών ορίζεται ως εξής:

$$\frac{\alpha + \beta \cdot i}{\gamma + \delta \cdot i} = \frac{(\alpha + \beta \cdot i) \cdot (\gamma - \delta \cdot i)}{(\gamma + \delta \cdot i)(\gamma - \delta \cdot i)} = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta) + (\beta\gamma - \alpha\delta) \cdot i}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i,$$

όπου $\gamma + \delta \cdot i \neq 0$.

9. **Συζυγής** ενός μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + \beta \cdot i$ ορίζεται ο αριθμός $\bar{z} = \alpha - \beta \cdot i$.

Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς η έννοια του συζυγούς μιγαδικού αριθμού χρησιμοποιήθηκε για να εκφράσουμε το αποτέλεσμα της διαίρεσης δύο μιγαδικών (και της αντιστροφή μιγαδικού) στην κανονική μορφή (δηλαδή στη μορφή $\alpha + \beta \cdot i$).

10. Το **Πραγματικό Μέρος** ενός μιγαδικού αριθμού, $z = \alpha + \beta \cdot i$, είναι $\mathrm{Re}(z) = \alpha$.

11. Το **Φανταστικό Μέρος** ενός μιγαδικού αριθμού, $z = \alpha + \beta \cdot i$, είναι $\mathrm{Im}(z) = \beta$.

Β. Βασικές Ιδιότητες

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες.

1. Δυνάμεις Μιγαδικών: Για να υπολογίσουμε τη δύναμη ενός μιγαδικού, εκτελούμε πράξεις όπως ακριβώς και στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών, δηλαδή γενικά ισχύει:

$z^0 = 1$, $\quad z^1 = z$, $\quad z^\nu = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z$, $\quad z^{-\nu} = \dfrac{1}{z^\nu}$,

Ιδιαίτερα, για τις δυνάμεις του i έχουμε:

$$i^\nu = i^{4\rho+\upsilon} = \left(i^4\right)^\rho i^\upsilon = i^\upsilon = \begin{cases} 1, & \upsilon = 0 \\ i, & \upsilon = 1 \\ -1, & \upsilon = 2 \\ -i, & \upsilon = 3 \end{cases}.$$

2. Ιδιότητες Συζυγών:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$,
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$,
- $\overline{\left(z^\nu\right)} = \left(\overline{z}\right)^\nu$.

$\boxed{z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)}$ $\qquad$ $\boxed{z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z) \cdot i}$

$\boxed{z = \overline{z}}$ $\Leftrightarrow$ Ο z είναι πραγματικός.

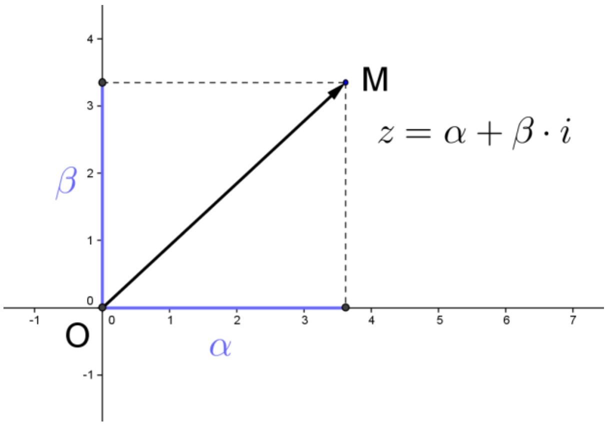
$\boxed{z = -\overline{z}}$ $\Leftrightarrow$ Ο z είναι φανταστικός.

Η απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων μπορεί να γίνει πολύ εύκολα κάνοντας τις πράξεις.

3. Επίλυση της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου οι *α, β, γ* είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha \neq 0$.

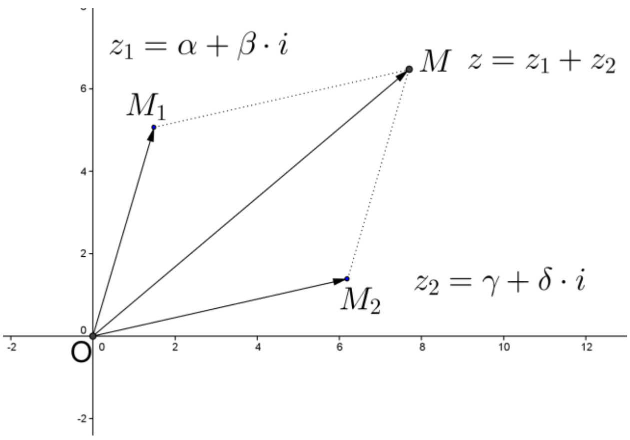
- Βήμα 1. Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.
- Βήμα 2. ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας Δ έχουμε τις εξής περιπτώσεις
  - Αν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
  - Αν $\Delta = 0$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$.
  - Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο (**συζυγείς**) μιγαδικές λύσεις $z_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$.

4. **Γεωμετρική Παράσταση Μιγαδικών**

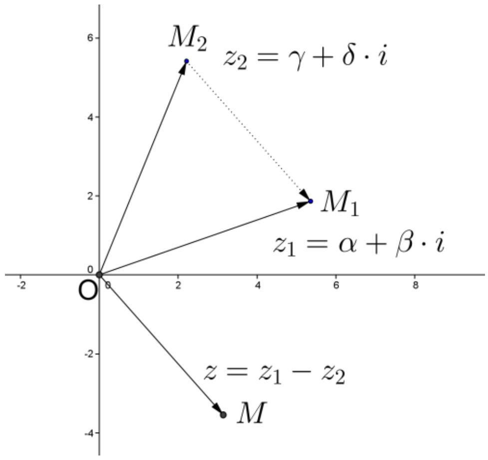


Κάθε μιγαδικός αριθμός, $z = \alpha + \beta \cdot i$, μπορεί να αναπαρασταθεί στο επίπεδο με τη βοήθεια του διανύσματος $\overrightarrow{OM} = (\alpha,\ \beta)$. Το διάνυσμα αυτό ονομάζεται συνήθως **διανυσματική ακτίνα** του μιγαδικού.

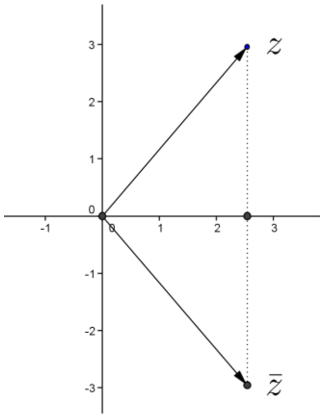
Η κατανόηση της γεωμετρικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών είναι πολύ σημαντική, αφού μας δίνει δυνατότητα εποπτείας των αριθμών αυτών. Το άθροισμα και η διαφορά δύο μιγαδικών μπορεί να δοθεί και με γεωμετρική μορφή όπως στα παρακάτω σχήματα.



(α) Γεωμετρική αναπαράσταση της Πρόσθεσης δύο Μιγαδικών.



(β) Γεωμετρική αναπαράσταση της Αφαίρεσης δύο Μιγαδικών.



(γ) Γεωμετρική αναπαράσταση του Συζυγούς ενός Μιγαδικού.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Η ισοδυναμία $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ και $b = 0$ **δεν ισχύει** στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών!

Η ισοδυναμία $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ή $b = 0$ **ισχύει** και στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών!

Ασκήσεις

1. Να γράψετε στη κανονική μορφή τους αριθμούς
α) $(1-i)^3-4(2+3i)^2$, β) $(2+i)^{-1}-4(1-i)^{-2}$

2. Να γραφούν στην μορφή $\alpha+\beta\cdot i$ οι αριθμοί:
α) $\dfrac{1}{(1+i)(2-3i)}$, β) $\dfrac{1}{(2-3i)^2}$,

3. Να τεθούν στη μορφή $\alpha+\beta\cdot i$ οι παραστάσεις
α) $2i-3i^5+i^{2013}$, β) $\dfrac{2i-5i^{16}}{2-i^{13}}$

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν ισχύει:
$i^{\nu}+i^{\nu+1}+i^{\nu+2}+i^{\nu+3}=\dfrac{1}{i^{\nu}}+\dfrac{1}{i^{\nu+1}}+\dfrac{1}{i^{\nu+2}}+\dfrac{1}{i^{\nu+3}}$

5. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=(1+i^{\nu})(1+i^{2\nu})$ για τις διάφορες τιμές του φυσικού αριθμού ν.

6. Να βρείτε τις τιμές της παράστασης $A=1-i+i^2-i^3+\ldots+(-1)^{\nu}i^{\nu}$ για τις διάφορες τιμές του φυσικού αριθμού ν.

7. Αποδείξτε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, ισχύει η σχέση $(\alpha+\beta\cdot i)^{2012}+(\beta-\alpha\cdot i)^{2012}=0$.

8. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει η σχέση
$(x-yi)^2=xi$.

9. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε οι $z=-(\lambda^2+i)i$ και $w=\lambda(\lambda-4i)+3i$ να είναι ίσοι.

10. Να προσδιοριστούν οι $x,y\in\mathbb{R}$, ώστε $(1-i)x+y(1+2i)=2-i$.

11. Δίνονται οι μιγαδικοί $z=3-\lambda i$ και $\omega=(\lambda-1)+i$. Να προσδιοριστεί ο $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε ο αριθμός $z\cdot\omega$ να είναι
α) Πραγματικός β) Φανταστικός

12. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ την εξίσωση $2iz-(1+i)z=2$.

13. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.
α) $z-2\bar{z}=0$ β) $z+\bar{z}=1$ γ) $2z^2-3\bar{z}+1=0$.

14. Να λυθεί η εξίσωση $4z^2-2z+1=0$, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

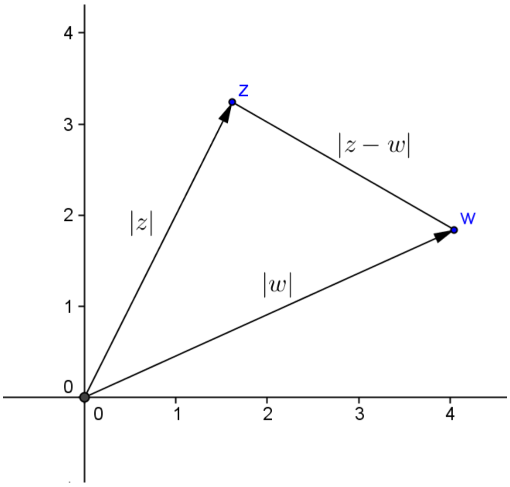
15. Να λυθεί η εξίσωση $z^2-(2-i)z+3-i=0$, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών..

ΜΕΡΟΣ ΙΙ
ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Α. Ορισμός

Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = x + y \cdot i$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως **μέτρο** του *z* την απόσταση του *M* από την αρχή των αξόνων *O*. Δηλαδή:

$$\boxed{|z| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$



Στην περίπτωση όπου $z \in \mathbb{R}$, το μέτρο του z ταυτίζεται με την απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού *z*.

Η ποσότητα $|z - w|$ εκφράζει την απόσταση των εικόνων των *z*, *w* στο μιγαδικό επίπεδο.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω εννοιών.

Β. Βασικές ιδιότητες Μέτρου

1. $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
2. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
4. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

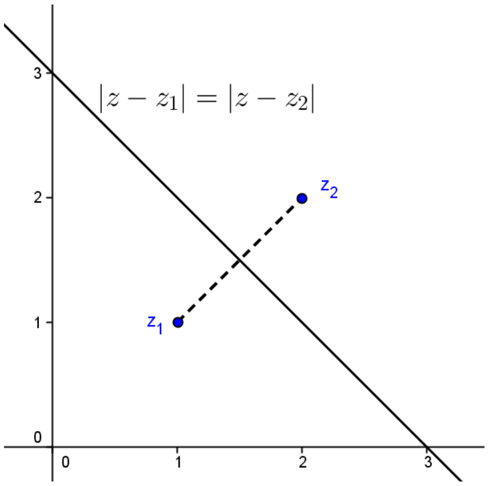
ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

$$\boxed{\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|}$$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

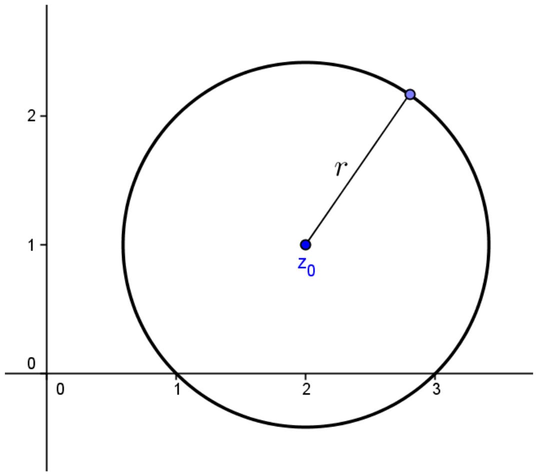
Α. Μεσοκάθετος: $|z-z_1|=|z-z_2|$

Ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z που ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τις εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2.



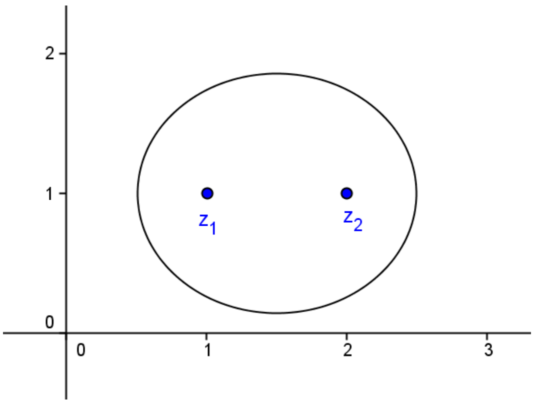
Β. Κύκλος: $|z-z_0|=r$

Ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z που ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση είναι κύκλος με κέντρο την εικόνα του μιγαδικού z_0 και ακτίνα r.



Γ. Έλλειψη: $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$

Σύμφωνα με τη γνωστή θεωρία από την Β΄ Λυκείου, ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z που ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση είναι η έλλειψη με εστίες τις εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2, εστιακή απόσταση ίση με $2\gamma=|z_2-z_1|$ και μεγάλο άξονα ίσο με $2a$.



Δ. Ανισώσεις:

1. $|z-z_1|<|z-z_2|$: Το ημιεπίπεδο που ορίζει η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τις εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2, το οποίο περιέχει την εικόνα του z_1.

2. $|z-z_0|<r$: Το εσωτερικό του κυκλικού δίσκου.

3. $|z-z_0|>r$: Το εξωτερικό του κυκλικού δίσκου.

4. Με αντίστοιχο τρόπο δουλεύουμε και για άλλους γεωμετρικούς τόπους.

ΙΔΙΑΙΤΕΡΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

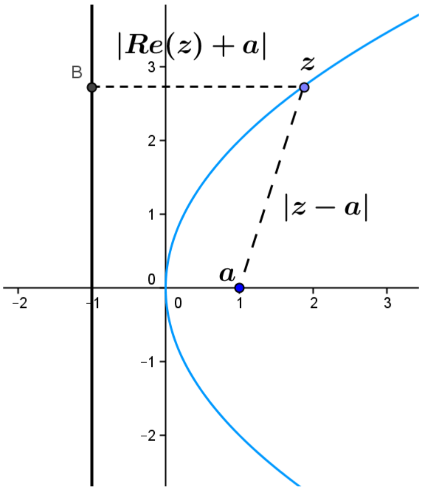
(Δεν αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο)

Α. Παραβολή:

$|z-a| = |\mathrm{Re}(z)+a|$ ή

$|z-a\cdot i| = |\mathrm{Im}(z)+a|$ (με $a \in \mathbb{R}$)

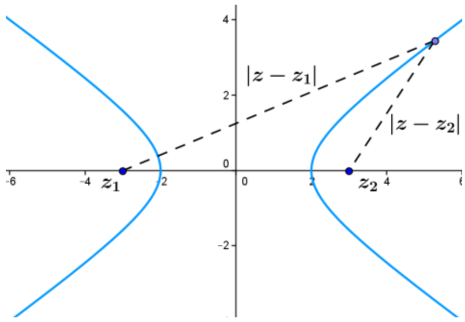
Ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z που ικανοποιούν μια από τις παραπάνω εξισώσεις είναι είτε η παραβολή $y^2 = 4\cdot a\cdot x$ είτε η παραβολή $x^2 = 4\cdot a\cdot y$ αντίστοιχα.



Β.Υπερβολή: $\left|\,|z-z_1|-|z-z_2|\,\right| = 2a$

Ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z που ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση είναι υπερβολή με εστίες τους z_1 και z_2 και μεγάλο άξονα a.

Αν μας δίνεται η εξίσωση $|z-z_1|-|z-z_2| = 2a$, με $a>0$, τότε παίρνουμε **μόνο** το κομμάτι της υπερβολής που είναι εγγύτερα στην εστία z_2. Ομοίως, αν μας δίνεται η εξίσωση $|z-z_2|-|z-z_1| = 2a$ με $a>0$, τότε παίρνουμε **μόνο** το κομμάτι της υπερβολής που είναι εγγύτερα στην εστία z_1.



Ασκήσεις

1. Να βρείτε το μέτρο των μιγαδικών αριθμών:

$z_1 = 2 - i\,,\ \ z_2 = \dfrac{3-i}{i} + 1\,,\ \ z_3 = \dfrac{\left(\sqrt{2} - i\right)^2}{i \cdot \left(i\sqrt{3} + 1\right)^2}$

2. Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό για τον οποίο ισχύει:

$$|z - i| = |z - 1| = |z + i|.$$

3. Να προσδιοριστεί ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει:

$$|z - 2| = |z + 1| = |z + 2i|.$$

4. Να λυθεί η εξίσωση $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

5. Να λυθεί η εξίσωση

$$\left|\frac{z-2}{z-4}\right| = 1$$

6. Να λυθεί η εξίσωση $|\bar{z}| - z = 1 + 2i$.

7. Αν γνωρίζετε ότι ο αριθμός

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

είναι φανταστικός, να δείξετε ότι ο z έχει μέτρο 1.

8. Αν ισχύει η σχέση $|z - 9| = 3|z - 1|$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο διαγράφει κύκλο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, το κέντρο και την ακτίνα του

9. Αν ισχύει ότι $|z - 11| = 3|z - 3|$, να αποδείξετε ότι $|z - 2| = 3$.

10. Αν $z \in \mathbb{C}$, ν φυσικός αριθμός, $\nu \neq 0$, και $(1 + iz)^\nu = (1 - iz)^\nu$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

11. Αν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z_1, z_2, \ldots, z_n$, στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται πάνω σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας 1, να αποδείξετε ότι

$$\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_n}\right| = |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq n.$$

12. Αν $z, w \in \mathbb{C}$, αν αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει

$$x^2 - 2|z - w|x + \left(1 + |z|^2\right)\left(1 + |w|^2\right) \geq 0.$$

13. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ δείξτε ότι

$$|1 - z\overline{w}| - |z - w|^2 = \left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |w|^2\right).$$

14. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z-3|$, όταν $z \in \mathbb{C}$ και $|z+4i| \le 2$.

15. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει ότι $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) + 3$, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z|^2 - 8$.

16. Αποδείξτε ότι για κάθε ζεύγος μιγαδικών αριθμών z, w ισχύει:
$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.