Πινακεσ - μεροσ Α

Το παρόν φυλλάδιο σημειώσεων περιέχει τη βασική θεωρία για τους πίνακες. Ορίζουμε την έννοια του πίνακα, τις βασικές πράξεις μεταξύ πινάκων, δίνουμε τις βασικές ιδιότητες αλλά και τις έννοιες που σχετίζονται με τους πίνακες (δυνάμεις, τάξη, αντιστροφή, κ.λ.π.) αλλά και τα πιο σημαντικά είδη πινάκων όπως ο συμμετρικός, ο ερμιτιανός κ.λ.π.

1 Βασικεσ Εννοιεσ

Οι περισσότεροι από τους ορισμούς που θα δώσουμε αναφέρονται σε ένα τυχαίο αλγεβρικό σώμα $\mathbb{F}$. Συνήθως όμως αυτό το σώμα είναι είτε οι πραγματικοί αριθμοί ($\mathbb{R}$), ή οι μιγαδικοί αριθμοί ($\mathbb{C}$).

Ορισμός 1. *Ένας πίνακας A στο σώμα $\mathbb{F}$ είναι ένα σύνολο στοιχείων διατεταγμένα σε ορθογώνιο πλέγμα από M γραμμές και N στήλες της μορφής:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1} & a_{M,2} & a_{M,3} & \dots & a_{M,N} \end{pmatrix}.$$

Λέμε ότι ο παραπάνω πίνακας έχει μέγεθος $M \times N$ ή ότι είναι ένας $M \times N$ πίνακας.

Στη συνέχεια τους πίνακες θα τους συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα, ενώ τα στοιχεία τους με μικρά. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης και τον συμβολισμό $A = (a_{m,n})$, όπου τα $n = 1, 2 \dots, M$ και $m = 1, 2, \dots N$. Κάθε στοιχείο, $a_{m,n}$ ενός πίνακα προσδιορίζεται από δύο φυσικούς αριθμούς (τους m, n) που καθορίζουν τη θέση του στοιχείου στο πλέγμα του πίνακα. Συγκεκριμένα ο πρώτος αριθμός (m) δείχνει τον αριθμό της γραμμής στην οποία ανήκει το στοιχείο, ενώ ο δεύτερος αριθμός (n) τον αριθμό της στήλης στην οποία βρίσκεται το στοιχείο. Οι N πλειάδες

$$c_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{M,1} \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{M,2} \end{pmatrix}, \dots c_N = \begin{pmatrix} a_{1,N} \\ a_{2,N} \\ \vdots \\ a_{M,N} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

είναι οι **στήλες** του πίνακα, ενώ οι

$$r_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,N}), \ldots r_M = (a_{M,1}, a_{M,2}, \ldots, a_{M,N})$$

είναι οι **γραμμές** του πίνακα. Στην περίπτωση όπου ο πίνακας έχει μόνο μια στήλη, είναι δηλαδή μεγέθους $M \times 1$, τότε ουσιαστικά έχουμε ένα διάνυσμα του $\mathbb{F}^M$. Για να ξεχωρίσουμε αυτή την περίπτωση θα συμβολίζουμε τα διανύσματα με μικρά παχιά (bold) γράμματα. Για παράδειγμα:

- ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ είναι ένας 2×3 πίνακας του $\mathbb{R}$.
- ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ είναι ένας 4×2 πίνακας του $\mathbb{R}$
- ο πίνακας $C = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ είναι ένας 2×2 πίνακας του $\mathbb{C}$
- ο $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ είναι ένας 3×1 πίνακας, δηλαδή ένα στοιχείου του $\mathbb{R}^3$.

δύο πίνακες θα λέγονται **ίσοι** και θα γράφουμε $A = B$, αν έχουν ίδια δομή (δηλαδή ίδιες διαστάσεις π.χ. $M \times N$) και τα στοιχεία τους είναι ίσα ένα προς ένα, δηλαδή $a_{m,n} = b_{m,n}$ για κάθε $n = 1, 2 \ldots, M$ και $m = 1, 2, \ldots N$. Ο πίνακας που έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με το 0 ονομάζεται **μηδενικός πίνακας** και συμβολίζεται με 0.

2 Τετραγωνικοί Πίνακες

Μια ειδική κατηγορία πινάκων που συναντάται σε πλήθος εφαρμογών είναι οι λεγόμενοι **τετραγωνικοί πίνακες**. Όπως μαρτυρά και το όνομά τους πρόκειται για πίνακες με ίσο αριθμό γραμμών και στηλών (π.χ. με διαστάσεις $N \times N$). Στους τετραγωνικούς πίνακες μπορούμε να σχηματίσουμε την λεγόμενη **κύρια διαγώνιο** που περιλαμβάνει τα στοιχεία $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{N,N}$. Η διαγώνιος αυτή ενώνει το πάνω αριστερά στοιχείο του πίνακα με το κάτω δεξιά στοιχείο του. Στα επόμενα παραδείγματα η διαγώνιος φαίνεται με κόκκινα γράμματα.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -i & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}.$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και η **δευτερεύουσα διαγώνιος** ενός τετραγωνικού πίνακα, η οποία ενώνει το πάνω δεξιά με το κάτω αριστερά στοιχείο του πίνακα. Επομένως, η διαγώνιος αυτή περιλαμβάνει τα στοιχεία $a_{1,N}, a_{2,N-1}, \ldots, a_{N,1}$. Στα επόμενα παραδείγματα η δευτερεύουσα διαγώνιος φαίνεται με κόκκινα γράμματα.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -i & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ένα στοιχείο $a_{m,n}$ ανήκει στην κύρια διαγώνιο, αν και μόνο αν $m = n$, ενώ ανήκει στην δευτερεύουσα διαγώνιο, αν και μόνο αν $m + n = N + 1$.

Ορισμός 2. *Ένας τετραγωνικός πίνακας καλείται* ***διαγώνιος*** *αν όλα τα στοιχεία του που δεν ανήκουν στην κύρια διαγώνιο είναι ίσα με το 0. Δηλαδή ο $N \times N$ πίνακας $A = (a_{m,n})$ είναι διαγώνιος αν $a_{m,n} = 0$, για κάθε $m \neq n$, $m, n = 1, 2, \ldots, N$.*

Παρακάτω δίνουμε μερικά παραδείγματα διαγώνιων πινάκων.

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ένας πολύ σημαντικός διαγώνιος πίνακας είναι ο **μοναδιαίος** πίνακας τάξης N. Όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου αυτού του πίνακα είναι ίσα με τη 1. Ο αριθμός N δηλώνει τη διάσταση του πίνακα (δηλαδή $N \times N$):

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 3. *Ένας τετραγωνικός πίνακας καλείται* ***άνω τριγωνικός*** *αν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι ίσα με το 0. Δηλαδή ο $N \times N$ πίνακας $A = (a_{m,n})$ είναι άνω τριγωνικός αν $a_{m,n} = 0$, για κάθε $m > n$, $m, n = 1, 2, \ldots, N$. Ένας τετραγωνικός πίνακας καλείται* ***κάτω τριγωνικός*** *αν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι ίσα με το 0. Δηλαδή ο $N \times N$ πίνακας $A = (a_{m,n})$ είναι κάτω τριγωνικός αν $a_{m,n} = 0$, για κάθε $m < n$, $m, n = 1, 2, \ldots, N$.*

Παρακάτω δίνονται μερικά παραδείγματα τριγωνικών πινάκων. Οι δύο πρώτοι πίνακες είναι άνω τριγωνικοί, ενώ οι δύο τελευταίοι είναι κάτω τριγωνικοί.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 4. *Το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων ενός τετραγωνικού πίνακα ονομάζεται* ***ίχνος*** *του πίνακα και συμβολίζεται με*

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{n=1}^{N} a_{n,n}.$$

3 Προσθεση Πινακων και Βαθμωτο Γινομενο

Δίνονται οι $M \times N$ πίνακες A, B. Ορίζουμε ως **άθροισμα** των A, B τον πίνακα

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1} & a_{M,2} & a_{M,3} & \dots & a_{M,N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,N} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{M,1} & b_{M,2} & b_{M,3} & \dots & b_{M,N} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & a_{1,3}+b_{1,3} & \dots & a_{1,N}+b_{1,N} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & a_{2,3}+b_{2,3} & \dots & a_{2,N}+b_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1}+b_{M,1} & a_{M,2}+b_{M,2} & a_{M,3}+b_{M,3} & \dots & a_{M,N}+b_{M,N} \end{pmatrix}$$

Τονίζουμε ότι δεν ορίζεται άθροισμα πινάκων με διαφορετικές διαστάσεις. Το γινόμενο ενός αριθμού, $\lambda \in \mathbb{F}$, με τον πίνακα A είναι ο πίνακας

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \lambda a_{1,3} & \dots & \lambda a_{1,N} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \lambda a_{2,3} & \dots & \lambda a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{M,1} & \lambda a_{M,2} & \lambda a_{M,3} & \dots & \lambda a_{M,N} \end{pmatrix}.$$

επιπλέον ορίζουμε ότι $-A = (-1) \cdot A$ και $A - B = A + (-B)$. Παρακάτω δίνονται μερικά παραδείγματα:

- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
- $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$,
- $2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Αν οι A, B, C, D είναι $M \times N$ πίνακες και $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, τότε μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $A + 0 = A$
3. $A + (-A) = 0$
4. $A + B = B + A$
5. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
7. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
8. $1 \cdot A = A$ και $0 \cdot A = 0$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε ότι αν θεωρήσουμε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^N$ ως πίνακες διάστασης $N \times 1$, τότε η πρόσθεση και το βαθμωτό γινόμενο που ορίσαμε εδώ ταυτίζεται με την πρόσθεση και το βαθμωτό γινόμενο στο χώρο των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^N$. Επομένως, μπορούμε να δούμε τους παραπάνω ορισμούς ως γενικεύσεις των γνωστών πράξεων των διανυσμάτων στο σύνολο των πινάκων.

4 Πολλαπλασιασμος Πινακων

Δίνονται οι πίνακες $A=(a_{k,m})$, $B=(b_{m,n})$ με διαστάσεις $K\times M$ και $M\times N$ αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να ορίσουμε το **γινόμενο** των δύο πινάκων ως ένα νέο πίνακα $C=A\cdot B$ διατάσεων $K\times N$, έτσι ώστε

$$c_{k,n}=\sum_{m=1}^{M}a_{k,m}\cdot b_{m,n}=a_{k,1}b_{1,n}+a_{k,2}b_{2,n}+\cdots+a_{k,M}b_{M,n},$$

για $k=1,2,\ldots,K$ και $n=1,2\ldots N$. Το παρακάτω σχήμα είναι αρκετά βοηθητικό στο να κατανοήσουμε πως ακριβώς γίνεται ο πολλαπλασιασμός σε δύο πίνακες και συγκεκριμένα πως υπολογίζεται το στοιχείο $c_{k,n}$ του νέου πίνακα. Όπως δείχνει το σχήμα, για να υπολογίσουμε το στοιχείο $c_{k,n}$ στο γινόμενο C (δηλαδή το στοιχείο που βρίσκεται στην k γραμμή και στην n στήλη του πίνακα C) αθροίζουμε τα γινόμενα των στοιχείων της k γραμμής του A με τα στοιχεία της n γραμμής του B.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m} & \ldots & a_{1,M}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,m} & \ldots & a_{2,M}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \ddots & \ldots\\ a_{k,1} & a_{k,2} & \ldots & a_{k,m} & \ldots & a_{k,M}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{K,1} & a_{K,2} & \ldots & a_{K,m} & \ldots & a_{K,M} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots & b_{1,n} & \ldots & b_{1,N}\\ b_{2,1} & b_{2,2} & \ldots & b_{2,n} & \ldots & b_{2,N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \ddots & \ldots\\ b_{m,1} & b_{m,2} & \ldots & b_{m,n} & \ldots & b_{m,N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{M,1} & b_{M,2} & \ldots & b_{M,n} & \ldots & b_{M,N} \end{pmatrix}$$

Τονίζουμε ότι απαραίτητη προϋπόθεση για να μπορεί να οριστεί το γινόμενο δύο πινάκων είναι ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου πίνακα. Παρακάτω δίνονται μερικά παραδείγματα:

- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0\\ -1 & 1\\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot2+(-1)\cdot(-1)+1\cdot(-1) & 1\cdot0+(-1)\cdot1+1\cdot1\\ -1\cdot2+2\cdot(-1)+0\cdot(-1) & -1\cdot0+2\cdot1+0\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0\\ -4 & 2 \end{pmatrix}$,
- $\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot1+(-1)\cdot2 & 1\cdot1+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot0+(-1)\cdot1\\ 0\cdot1+1\cdot2 & 0\cdot1+1\cdot(-1) & 0\cdot0+1\cdot1\\ 1\cdot1+1\cdot2 & 1\cdot1+1\cdot(-1) & 1\cdot0+1\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,
- $\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot1+2\cdot2\\ 3\cdot1+4\cdot0 & 3\cdot1+4\cdot2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5\\ 3 & 11 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot1+1\cdot3 & 1\cdot2+1\cdot4\\ 0\cdot1+2\cdot3 & 0\cdot2+2\cdot4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6\\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

Τα δύο τελευταία παραδείγματα καταδεικνύουν ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν πληροί την αντιμεταθετική ιδιότητα. Ικανοποιεί όμως τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $(AB)C = A(BC)$,
2. $A(B+C) = AB + AC$,
3. $(B+C)A = BA + CA$,
4. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$,

όπου οι A, B, C είναι πίνακες με κατάλληλες διαστάσεις ώστε να ορίζονται τα γινόμενα και ο λ είναι ένας αριθμός. Στη συνέχεια περιοριζόμαστε σε γινόμενα **τετραγωνικών πινάκων**, όπου μπορεί να οριστεί και το γινόμενο AB και το γινόμενο BA.

Ορισμός 5. *Ένας τετραγωνικός πίνακας A διαστάσεων $N \times N$ θα λέγεται* ***αντιστρέψιμος*** *αν υπάρχει $N \times N$ πίνακας B τέτοιος ώστε να ισχύει $AB = BA = I_N$, όπου I_N είναι ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης $N \times N$. Ο πίνακας B (αν υπάρχει) καλείται ο* ***αντίστροφος*** *του A και συμβολίζεται με A^{-1}.*

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι αν υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας αυτός είναι μοναδικός. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικοί πίνακες B_1, B_2 για τους οποίους $AB_1 = B_1A = I_N$, $AB_2 = B_2A = I_N$, τότε πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση με B_2 από αριστερά θα έχουμε $AB_1 = I_N \Rightarrow B_2AB_1 = B_2$ και αφού $B_2A = I_N$, παίρνουμε ότι $B_1 = B_2$. Είναι επίσης προφανές ότι αν ο B είναι ο αντίστροφος του A, τότε ο A είναι ο αντίστροφος του B, δηλαδή $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$. Επίσης, αποδεικνύεται η επόμενη πρόταση:

Πρόταση 1. *Αν οι τετραγωνικοί πίνακες A, B, διαστάσεων $N \times N$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε και ο AB είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση. Αφού οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι, τότε υπάρχουν οι A^{-1}, B^{-1}. Παρατηρούμε ότι $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_N$ και $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I_N$. Άρα ο πίνακας AB είναι αντιστρέψιμος και $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

Σε τετραγωνικούς πίνακες μπορούμε να ορίσουμε και δυνάμεις. Συγκεκριμένα ορίζουμε:

- $A^0 = I_N$.
- $A^k = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$, όπου το γινόμενο έχει k παράγοντες. Π.χ. $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$.
- $A^{-k} = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \dots \cdot A^{-1}$, όπου το γινόμενο έχει k παράγοντες. Π.χ. $A^{-2} = A^{-1} \cdot A^{-1}$, $A^{-3} = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1}$.

Πρόταση 2: Διωνυμικό Ανάπτυγμα Πινάκων

Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες διαστάσεων $N \times N$, για τους οποίους ισχύει $AB = BA$. Τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) A^{m-k} B^k.$$

Ιδιαιτέρως, για έναν τυχαίο τετραγωνικό πίνακα A έχουμε

$$(I_N + A)^m = \sum_{k=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) A^k.$$

5 Αλλες Ειδικες Κατηγοριες Πινακων

Θα ολοκληρώσουμε αυτή την μικρή εισαγωγή στους πίνακες αναφέροντας κάποιους ακόμη ορισμούς και κάποιες επιπλέον κατηγορίες πινάκων

Ορισμός 6. *Αν $A = (a_{m,n})$ είναι ένας $M \times N$ πίνακας, τότε ο $N \times M$ πίνακας $A^T = (a_{n,m})$ ο οποίος προκύπτει γράφοντας τις γραμμές του A ως στήλες, ονομάζεται* ***ανάστροφος*** *τοψ A.*

Για παράδειγμα ο ανάστροφος του $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Η διαδικασία αναστροφής των γραμμών σε στήλες ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$,
2. $\left(A^T\right)^T = A$,
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$,
4. $(AB)^T = B^T A^T$,

όπου οι A, B είναι πίνακες $M \times N$ και ο λ ένας αριθμός.

Ορισμός 7. *Αν $A = (a_{m,n})$ είναι ένας $M \times N$ πίνακας, τότε ο $M \times N$ πίνακας $A^* = (a^*_{m,n})$ ονομάζεται* ***συζυγής*** *του A.*

Τονίζουμε ότι στον παραπάνω ορισμό, το σύμβολο * αναφέρεται στο συζυγή μιγαδικό αριθμό (αν $z = x + yi$, τότε $z^* = x - yi$). Ο πίνακας A^* επομένως περιέχει τα συζυγή στοιχεία του A. Στην περίπτωση που ο A είναι πραγματικός πίνακας, τότε προφανώς $A^* = A$.

Ορισμός 8. *Αν $A = (a_{m,n})$ είναι ένας $M \times N$ πίνακας, τότε ο $N \times M$ πίνακας $A^* = (a^*_{n,m})$ ονομάζεται* ***ερμιτιανός συζυγής*** *του A.*

Για πίνακες με πραγματικά στοιχεία οι έννοιες του ερμιτιανού συζυγή και του ανάστροφου ταυτίζονται. Επίσης, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $(A+B)^H = A^H + B^H$,
2. $\left(A^H\right)^H = A$,
3. $(\lambda A)^H = \lambda^* A^H$,
4. $(AB)^H = B^H A^H$,
5. $(A+B)^* = A^* + B^*$,
6. $(A^*)^*$,
7. $(\lambda A)^* = \lambda^* A^*$,
8. $(AB)^* = B^* A^*$,

Ισχύει επίσης το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3: Αντίστροφος ερμιτιανού συζυγή

Ένας $N \times N$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν ο A^H είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα:

$$\left(A^H\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^H .$$

Ορισμός 9. *Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται* ***συμμετρικός****, αν και μόνο αν είναι ίσος με τον ανάστροφό του, δηλαδή αν $A^T = A$. Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται* ***ερμιτιανός****, αν και μόνο αν είναι ίσος με τον ερμιτιανό συζυγή του, δηλαδή αν $A^H = A$.*

Ορισμός 10. *Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται* ***κανονικός****, αν και μόνο αν είναι ικανοποιεί τη σχέση $AA^H = A^H A$.*

Ορισμός 11. *Ένας κανονικός πίνακας A διαστάσεων $N \times N$ ονομάζεται* ***μοναδιακός****, αν και μόνο αν ικανοποιεί τη σχέση $AA^H = A^H A = I_N$, δηλαδή αν $A^H = A^{-1}$. Ο A ονομάζεται* ***ορθογώνιος*** *αν ικανοποιεί τη σχέση $AA^T = A^T A = I_N$, δηλαδή αν $A^T = A^{-1}$.*

Ορισμός 12. *Δίνεται ένας πίνακας A διαστάσεων $M \times N$. Αν $c_1, c_2, \ldots, c_N$ είναι οι στήλες του πίνακα τότε ορίζουμε τον* ***χώρο στηλών*** *του A ως το γραμμικό υπόχωρο που παράγεται από τις στήλες του A, δηλαδή $V_c = \mathrm{span}\{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$. Ομοίως, αν $r_1, r_2, \ldots, r_M$ είναι οι γραμμές του πίνακα τότε ορίζουμε τον* ***χώρο γραμμών*** *του A ως το γραμμικό υπόχωρο που παράγεται από τις γραμμές του A (αν τις δούμε ως διανύσματα), δηλαδή $V_r = \mathrm{span}\{r_1^T, r_2^T, \ldots, r_M^T\}$. Αποδεικνύεται ότι αυτοί οι δύο υπόχωροι έχουν ίδια διάσταση, $r = \dim V_r = \dim V_c$. Ο αριθμός r ονομάζεται* ***τάξη*** *του πίνακα και συμβολίζεται με $\mathrm{rank}(A)$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{rank}(A) \leq \min\{M, N\}$.*

6 Παραδειγματα

Παράδειγμα 6.1. *Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Υπολογίστε τον πίνακα $3A + 4B - 2C$.*

Λύση. Εκτελούμε τις πράξεις βήμα-βήμα

$$\begin{aligned} 3A + 4B - 2C &= 3\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 9 & 0 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -8 & -12 \\ 0 & -4 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -25 & -5 \\ 7 & -2 & 10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 6.2. *Να υπολογίσετε τα x, y, z, w αν γνωρίζετε ότι*

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$$

Λύση. Εκτελώντας τις πράξεις στα δύο μέλη τις εξίσωσης παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 & x+y+6 \\ z+w & 2w+3 \end{pmatrix}$$

Από εδώ προκύπτει το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} 3x &= x + 4 \\ 3y &= x + y + 6 \\ 3z &= z + w - 1 \\ 3w &= 2w + 3 \end{aligned}$$

Επομένως, προκύπτει η λύση $x = 2, y = 4, z = 1, w = 3$. □

Παράδειγμα 6.3. *Να υπολογίσετε τα γινόμενα όπου μπορείτε:*

1. $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Λύση. Εκτελούμε τις πράξεις κατά τα γνωστά. Για το πρώτο ερώτημα έχουμε δύο πίνακες με διαστάσεις 2 επί 2 και 2 επί 2 αντίστοιχα. Επομένως το γινόμενο ορίζεται και είναι ένας 2 επί 2 πίνακας:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 6 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \\ -3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 & -3 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Το δεύτερο γινόμενο δεν μπορεί να οριστεί αφού οι πίνακες έχουν διαστάσεις 2×1 και 2×2. Για το τρίτο γινόμενο έχουμε έναν πίνακα 1×2 και έναν άλλο 2×1, επομένως το αποτέλεσμα θα είναι ένας πίνακα 1×1, δηλαδή ένας αριθμός:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-6) = 8.$$

Το τέταρτο γινόμενο μπορεί να οριστεί αφού ο πρώτος πίνακας είναι 2×2 και ο δεύτερος 2×1 και το αποτέλεσμα είναι ένας πίνακας 2×1, δηλαδή ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 6 \cdot (-7) \\ -3 \cdot 2 + 5 \cdot (-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ -41 \end{pmatrix}.$$

Το πέμπτο γινόμενο μπορεί επίσης να οριστεί αφού αφορά έναν πίνακα 2×1 και έναν άλλο $1 \cdot 2$, το αποτέλεσμα είναι ο 2×2 πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 \\ 6 \cdot 3 & 6 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}.$$

Τέλος, στο έκτο γινόμενο πολλαπλασιάζουμε με τον μοναδιαίο πίνακα, επομένως το αποτέλεσμα είναι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$. □

Παράδειγμα 6.4. *Να βρείτε τον ανάστροφο πίνακα του* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Λύση. Ο ανάστροφος θα είναι $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. □

Παράδειγμα 6.5. *Δίνεται ένας τυχαίος πίνακας A. Τι θα πρέπει να ισχύει για τις διαστάσεις του ώστε να ορίζονται τα γινόμενα $A^T A$, AA^T· Ποια είναι η απαραίτητη προϋπόθεση (για τις διαστάσεις) ώστε να είναι δυνατόν να έχουμε την ισότητα $A^T A = AA^T$·*

Λύση. Αν ο πίνακας A έχει διαστάσεις $M \times N$, τότε ο A^T θα έχει διαστάσεις $N \times M$. Επομένως, τα γινόμενα $A^T A$, AA^T ορίζονται πάντα και δίνουν πίνακες με διαστάσεις $N \times N$ και $M \times M$ αντίστοιχα. Για να μπορεί να ισχύει η ισότητα $A^T A = AA^T$, θα πρέπει $M = N$, δηλαδή ο A να είναι τετραγωνικός.

Παράδειγμα 6.6. *Δίνεται ο* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. *Να υπολογίσετε τους πίνακες A^2, A^3.*

Λύση.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Παράδειγμα 6.7. *Δίνονται οι διαγώνιοι πίνακες:*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_N \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_N \end{pmatrix}$$

Να υπολογίσετε το γινόμενο $A \cdot B$.

Λύση. Από τη θεωρία ξέρουμε ότι το στοιχείο $c_{m,n}$ ισούται με το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων της m-οστής γραμμής του πίνακα A με τα στοιχεία της n-οστής στήλης του πίνακα B:

$$c_{m,n} = \sum_{k=1}^{n} a_{m,k} b_{k,n}.$$

Στους πίνακες που έχουμε τα στοιχεία της m-οστής γραμμής του A είναι: $0, 0, \dots, 0, a_m, 0, \dots, 0$, όπου το μόνο πιθανό μη μηδενικό στοιχείο, a_m, βρίσκεται στη θέση m. Ομοίως, τα στοιχεία της

n-οστής γραμμής του B είναι: $0, 0, \ldots, 0, b_n, 0, \ldots, 0$, όπου το μόνο πιθανό μη μηδενικό στοιχείο, b_n, βρίσκεται στη θέση n. Επομένως, αν $n \neq m$ θα έχουμε $c_{m,n} = 0$ (αφού αθροίζουμε μηδενικά στοιχεία), ενώ αν $n = m$ θα έχουμε $c_{n,n} = a_n * b_n$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_N b_N \end{pmatrix}.$$

□

Παράδειγμα 6.8. *Δίνεται ο διαγώνιος πίνακας:*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_N \end{pmatrix}.$$

Να υπολογίσετε τον πίνακα A^k, $k > 0$.

Λύση. Σύμφωνα με το παράδειγμα 6.7, θα έχουμε:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_N^2 \end{pmatrix}.$$

Επομένως (μαθηματική επαγωγή) θα ισχύει

$$A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_N^k \end{pmatrix}.$$

□

Παράδειγμα 6.9. *Δίνεται ο διαγώνιος πίνακας:*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_N \end{pmatrix},$$

με $a_n \neq 0$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots, N$. Δείξτε ότι ο A αντιστρέφεται και να βρείτε τον αντίστροφο.

Λύση. Λαμβάνοντας υπ' όψη το παράδειγμα 6.7, είναι προφανές ότι χρειαζόμαστε ένα διαγώνιο πίνακα B:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_N \end{pmatrix},$$

με συντελεστές τέτοιους ώστε $AB = I_N$. Όμως το γινόμενο AB μας δίνει

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_N b_N \end{pmatrix}.$$

Άρα θα πρέπει $a_n b_n = 1$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots, N$. Επειδή $a_n \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας B θα είναι

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{a_N} \end{pmatrix}.$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι θα ισχύει και $BA = I_N$, άρα ο A αντιστρέφεται και ο αντίστροφος πίνακας είναι ο $A^{-1} = B$. □

Παράδειγμα 6.10. *Δίνεται ο πίνακας A, τέτοιος ώστε να ισχύει $A^2 - A - I = 0$.*

1. *Δείξτε ότι ο πίνακας A αντιστρέφεται και να υπολογίσετε τον αντίστροφο πίνακα.*
2. *Απλοποιήστε την παράσταση $A^4 - 3A^3 - A^2 + 7A - I$.*
3. *Απλοποιήστε την παράσταση $A^4(A - I)^5 - I$.*

Λύση. Για το πρώτο ερώτημα παρατηρούμε ότι αφού $A^2 - A - I = 0$, θα έχουμε $A^2 - A = I$ και άρα βγάζοντας τον πίνακα A κοινό παράγοντα από αριστερά θα έχουμε $A(A - I) = I$. Ομοίως, αν βγάλουμε τον A κοινό παράγοντα από δεξιά θα έχουμε $(A - I)A = I$. Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι $A^{-1} = A - I$.

Για να απλοποιήσουμε την παράσταση διαιρούμε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 7x - 1$ με το πολυώνυμο $q(x) = x^3 - x - 1$:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -3x^3 & -x^2 & +7x & -1 & x^2 - x - 1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & +x^2 & & & x^2 - 2x - 2 \\
--- & --- & --- & & & \\
 & -2x^3 & & +7x & -1 & \\
 & +2x^3 & -2x^2 & -2x & & \\
 & --- & --- & --- & & \\
 & & -2x^2 & +5x & -1 & \\
 & & 2x^2 & -2x & -2 & \\
 & & & 3x & -3 &
\end{array}
$$

Από την ταυτότητα της διαίρεσης παίρνουμε $x^4 - 3x^3 - x^2 + 7x - 1 = (x^3 - x - 1)(x^2 - x - 1) + 3x - 3$. Επομένως, θα ισχύει μια παρόμοια σχέση και στην περίπτωση των πινάκων, δηλαδή:

$$
\begin{aligned}
A^4 - 3A^3 - A^2 + 7A - I &= (A^3 - A - I)(A^2 - A - I) + 3A - 3I \\
&= 3A - 3I,
\end{aligned}
$$

όπου η τελευταία σχέση προκύπτει από το το ότι $A^2 - A - I = 0$.

Τέλος, για να απλοποιήσουμε την τρίτη παράσταση, παρατηρούμε ότι:

$$
\begin{aligned}
A^4(A-I)^5 - I &= A^4(A-I)^4(A-I) - I \\
&= A^3A(A-I)(A-I)^3(A-I) - I \\
&= A^3(A-I)^3(A-I) - I \\
&= A^2A(A-I)(A-I)^2(A-I) - I \\
&= A^2(A-I)^2(A-I) - I \\
&= AA(A-I)(A-I)(A-I) - I \\
&= A(A-I)(A-I) - I \\
&= (A-I) - I = A - 2I.
\end{aligned}
$$

Οι τελευταίες σχέσεις προκύπτουν από το ότι $A(A-I) = I$. Προσέξτε ότι γενικά δεν ισχύει η σχέση $A^4B^4 = (AB)^4$ σε πίνακες. Ισχύει μόνο στην περίπτωση όπου οι πίνακες είναι αντιμεταθετικοί στον πολλαπλασιασμό, δηλαδή όταν $AB = BA$. Στην συγκεκριμένη άσκηση, οι $A, A - I$ είναι αντιμεταθετικοί, αφού ο ένας είναι ο αντίστροφος του άλλου. Αν κάνουμε αυτή την παρατήρηση μπορούμε να γράψουμε άμεσα: $A^4(A-I)^5 - I = A^4(A-I)^4(A-I) - I = (A(A-I))^4(A-I) - I = I^4(A-I) - I = A - 2I$. □

Παράδειγμα 6.11. *Υπολογίστε τον πίνακα* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n$

Λύση. Υπολογίζουμε μερικές δυνάμεις προσπαθώντας να βρούμε ένα μοτίβο:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 65 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$$
$$\vdots$$

Αν παρατηρήσουμε προσεκτικά τις σχέσεις θα δούμε ότι φαίνεται να ισχύει ο παρακάτω γενικός τύπος:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Για να αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό, θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Παρατηρούμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 1$ και υποθέτουμε ότι για κάποιο $n = \nu$ έχουμε

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^\nu = \begin{pmatrix} 2^\nu & 3^\nu - 2^\nu \\ 0 & 3^\nu \end{pmatrix}.$$

Θα αποδείξουμε ότι για $n = \nu + 1$ ισχύει

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{\nu+1} = \begin{pmatrix} 2^{\nu+1} & 3^{\nu+1} - 2^{\nu+1} \\ 0 & 3^{\nu+1} \end{pmatrix}.$$

Πράγματι θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{\nu+1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{\nu}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^\nu & 3^\nu - 2^\nu \\ 0 & 3^\nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{\nu+1} & 2^\nu + 3(3^\nu - 2^\nu) \\ 0 & 3^{\nu+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{\nu+1} & 3^{\nu+1} - 2^{\nu+1} \\ 0 & 3^{\nu+1} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 6.12. *Υπολογίστε τον πίνακα* $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}^n$, *για* $a \in \mathbb{R}$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = I + B$, όπου $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $B^2 = a^2 I$ και άρα $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & a^3 \\ a^3 & 0 \end{pmatrix}$. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $B^{2n+1} =$

$\begin{pmatrix} 0 & a^{2n+1} \\ a^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}$ και $B^{2n} = \begin{pmatrix} a^{2n} & 0 \\ 0 & a^{2n} \end{pmatrix}$ (μαθηματική επαγωγή όπως στο παράδειγμα 6.11). Επομένως, χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα (πρόταση 2) θα πάρουμε (στην περίπτωση όπου ο $n = 2k$ είναι άρτιος):

$$
\begin{aligned}
A^n =&(I+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} B^k \\
=&I + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} B + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} B^2 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} B^{n-1} + B^n \\
=&I + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a^3 \\ a^3 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n/2} \begin{pmatrix} n \\ 2k \end{pmatrix} a^{2k} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n/2-1} \begin{pmatrix} n \\ 2k+1 \end{pmatrix} a^{2k+1} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n/2-1} \begin{pmatrix} n \\ 2k+1 \end{pmatrix} a^{2k+1} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n/2} \begin{pmatrix} n \\ 2k \end{pmatrix} a^{2k} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Δουλεύοντας εντελώς ανάλογα στην περίπτωση όπου το n είναι περιττός παίρνουμε μια παρόμοια σχέση:

$$
A^n = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{(n-1)/2} \begin{pmatrix} n \\ 2k \end{pmatrix} a^{2k} & \displaystyle\sum_{k=0}^{(n-1)/2} \begin{pmatrix} n \\ 2k+1 \end{pmatrix} a^{2k+1} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{(n-1)/2} \begin{pmatrix} n \\ 2k+1 \end{pmatrix} a^{2k+1} & \displaystyle\sum_{k=0}^{(n-1)/2} \begin{pmatrix} n \\ 2k \end{pmatrix} a^{2k} \end{pmatrix}.
$$

□