Σειρες

Το παρόν φυλλάδιο ασχολείται με τις σειρές. Η σύγκλιση σειρών είναι αλληλένδετη με τη σύγκλιση ακολουθιών. Άλλωστε, όπως θα δούμε στη συνέχεια, η σύγκλιση μιας σειράς, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, σε ένα όριο ℓ είναι εξ' ορισμού η σύγκλιση της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων, $s_n = a_0 + a_1 + \dots a_n$, στο ℓ και αντίστροφα. Επομένως, οι δύο έννοιες είναι μαθηματικά ταυτόσημες. Υπάρχει βέβαια μια ουσιαστική αλλαγή οπτικής γωνίας και η θεωρία της σύγκλισης σειρών αποτελεί ένα ενδιάμεσο στάδιο μεταξύ της γενικής μελέτης σύγκλισης ακολουθιών και της θεωρίας ολοκληρωμάτων.

1 Εισαγωγη

Ορισμός 1. *Έστω a_n μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε την **ακολουθία των μερικών αθροισμάτων** της a_n ως εξής: $s_n = a_0 + a_1 + \dots a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, για $n = 0, 1, 2, \dots$.*

*Το σύμβολο $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ είναι η **σειρά** με n-οστό όρο a_n και n-οστό μερικό άθροισμα s_n. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ **συγκλίνει** αν η ακολουθία s_n συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό και τότε $\lim_n s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Αν σειρά δεν συγκλίνει τότε λέμε ότι **αποκλίνει**.*

*Στην ειδική περίπτωση όπου η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ θα λέμε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ **συγκλίνει στο** $+\infty$ ή **συγκλίνει στο** $-\infty$ αντίστοιχα.*

Πολλές φορές θα χρησιμοποιούμε και σειρές της μορφής $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ $(n_0 \geq 0)$. Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι κάθε ορισμός ή πρόταση που διατυπώνεται για σειρές της μορφής $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ έχει ανάλογη διατύπωση και για σειρές της μορφής $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$.

Πρόταση 1. *Αν δύο ακολουθίες, a_n, b_n είναι τελικά ίσες (δηλαδή υπάρχει φυσικός αριθμός n_0*

τέτοιος ώστε $a_n = b_n$ για κάθε $n \geq n_0$), τότε οι σειρές $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ ή και δύο συγκλίνουν ή και οι δύο αποκλίνουν.

Πρόταση 2. *Αν οι σειρές $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ συγκλίνουν και λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ συγκλίνει και ισχύει:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης είναι άμεση, από την αντίστοιχη ιδιότητα των ακολουθιών. Αξίζει να παρατηρήσουμε πως αν η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει και η $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ αποκλίνει τότε αποκλίνει και η $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)$. Πράγματι, αν η $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)$ συνέκλινε, τότε το ίδιο θα ίσχυε και για την σειρά της ακολουθίας $(a_n + b_n) - a_n = b_n$, επομένως οδηγούμαστε σε άτοπο. Επίσης, είναι δυνατόν οι σειρές $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ να αποκλίνουν και η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)$ να συγκλίνει (π.χ. $a_n = (-1)^n$ και η $b_n = (-1)^{n+1}$). Τέλος, αν η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει τότε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι φραγμένη (το αντίστροφο προφανώς δεν ισχύει).

Πρόταση 3

Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_n a_n = 0$.

Απόδειξη. Αν $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων, τότε παρατηρούμε ότι $a_n = s_n - s_{n-1}$. Επομένως, αν $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_n s_n = \ell$, τότε $\lim_n a_n = \lim_n s_n - \lim_n s_{n-1} = \ell - \ell = 0$. □

Στη συνέχεια θα δώσουμε μερικά πολύ βασικά κριτήρια σύγκλισης σειρών και μερικά παραδείγματα σειρών στις οποίες θα εξετάσουμε τη σύγκλιση.

Πρόταση 4: Κριτήριο Φράγματος

Δίνεται η ακολουθία $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει, αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι αν η σειρά συγκλίνει τότε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της συγκλίνει, επομένως είναι φραγμένη. Για το αντίστροφο (το οποίο δεν ισχύει βέβαια για μια τυχαία ακολουθία, αλλά μόνο για ακολουθίες θετικών όρων) παρατηρούμε ότι η ακολουθία s_n είναι αύξουσα αφού $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$. Επομένως η s_n είναι αύξουσα και φραγμένη άρα συγκλίνει. □

Παράδειγμα 1.1. *Η αρμονική σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *δεν συγκλίνει, παρότι,* $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.

Παρατηρούμε ότι:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1,\\
s_2 &= s_1 + \frac{1}{2}\\
s_4 &= s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq s_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = s_2 + \frac{1}{2}\\
s_8 &= s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq s_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = s_8 + \frac{1}{2},\\
&\dots\\
s_{2^n} &= s_{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}\\
&\geq s_{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}\\
&= s_{2^{n-1}} + \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+2^{n-1}} = s_{2^{n-1}} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Επομένως, αν αθροίσουμε όλες τις παραπάνω σχέσεις θα έχουμε

$$
s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2},
$$

για κάθε $n \geq 0$. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων δεν είναι φραγμένη (αφού το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι φραγμένο). Επομένως, η ακολουθία s_n (και η αντίστοιχη σειρά) δε συγκλίνει. □

Παράδειγμα 1.2. *Έστω k ακέραιος αριθμός. Η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$ *συγκλίνει, αν $k > 1$. Αν $k \leq 1$ η σειρά αποκλίνει.*

Για $k = 1$ είδαμε ότι η σειρά αποκλίνει. Έστω $k < 1$. Τότε:

$$
\begin{aligned}
s_n &= 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{n^k}\\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

Όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\frac{1}{n}$ δεν είναι φραγμένη, επομένως ούτε η s_n θα είναι φραγμένη. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$ αποκλίνει και για $k < 1$.

Για $k = 2$, θα έχουμε:

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

για $n = 2, 3, \ldots$. Άρα για τη σειρά των μερικών αθροισμάτων θα έχουμε:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{n} \leq 2, \end{aligned}$$

για $n = 2, 3, \ldots$. Επομένως, η ακολουθία μερικών αθροισμάτων είναι φραγμένη και άρα (πρόταση 4) η σειρά συγκλίνει. Ομοίως, για $k > 2$, για την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων θα έχουμε

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{n^k} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Άρα, αφού για $k = 2$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι φραγμένη, θα είναι φραγμένη η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων και για $k > 2$. Επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$ συγκλίνει για $k > 2$. □

Παράδειγμα 1.3. *Δίνεται η ακολουθία a_n,*

$$a_1 = 1, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{3}, a_5 = \frac{1}{3}, a_6 = \frac{1}{3}, a_7 = -\frac{1}{4}, a_8 = -\frac{1}{4}, a_9 = -\frac{1}{4}, a_{10} = -\frac{1}{4}, \ldots$$

και γενικά $a_n = (-1)^{m+1}\frac{1}{m}$, για κάθε $n = \frac{m(m-1)}{2} + 1, \frac{m(m-1)}{2} + 2, \ldots \frac{m(m+1)}{2}$, $m = 1, 2 \ldots$. Αποδείξετε ότι

1. $\lim_n a_n = 0$
2. *Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ είναι φραγμένη.*
3. *Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.*

Παίρνοντας τη σχέση $n = \frac{m(m+1)}{2}$ και λύνοντας ως προς m το τριώνυμο που προκύπτει θα έχουμε: $m = \frac{-1+\sqrt{1+8n}}{2}$. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε εναλλακτικά την ακολουθία ως εξής:

$$a_n = (-1)^{\left\lceil \frac{-1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\rceil + 1} \frac{1}{\left\lceil \frac{-1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\rceil},$$

όπου $\lceil x \rceil$ είναι η γνωστή συνάρτηση ceil που εκφράζει τον ελάχιστο ακέραιο αριθμό που είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον x (για παράδειγμα $\lceil 2.1 \rceil = 3$, $\lceil 2 \rceil = 2$, $\lceil -2.5 \rceil = -2$). Επομένως, αφού $\frac{-1+\sqrt{1+8n}}{2} \leq \left\lceil \frac{-1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\rceil$, θα έχουμε:

$$|a_n| = \frac{1}{\left\lceil \frac{-1+\sqrt{1+8n}}{2} \right\rceil} \leq \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{1+8n}}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{1+8n}}.$$

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η ακολουθία $b_n = \frac{2}{-1+\sqrt{1+8n}}$ είναι μηδενική, άρα (χρησιμοποιώντας το κριτήριο παρεμβολής για τη σύγκλιση ακολουθιών) θα έχουμε $\lim_n |a_n| = 0$ και επομένως $\lim_n a_n = 0$. Όσον αφορά τη σειρά των μερικών αθροισμάτων, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $0 \leq s_n \leq 1$, επομένως είναι πράγματι φραγμένη. Όμως, μπορούμε να βρούμε δύο υπακολουθίες της s_n που να συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια. Δύο τέτοιες υπακολουθίες είναι η $c_n = s_{\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}} = 1$ και η $d_n = s_{\frac{(2n)(2n+1)}{2}} = 0$, για $n = 0, 1, \ldots$. □

Πρόταση 5: Κριτήριο Cauchy

Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός n_0, τέτοιος ώστε

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon,$$

για κάθε $n > m \geq n_0$.

Απόδειξη. Η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της, $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ συγκλίνει. Όπως όμως ξέρουμε μια ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν είναι βασική. Επομένως, η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε να ισχύει $|s_n - s_m| < \varepsilon$ ή ισοδύναμα $|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon$, για κάθε $n, m \geq n_0$. □

Ορισμός 2. *Θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ **συγκλίνει απόλυτα**, αν η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ συγκλίνει.*

Πρόταση 6. *Η απόλυτη σύγκλιση είναι ισχυρότερη έννοια από την απλή σύγκλιση. Αν μια σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε αναγκαστικά συγκλίνει.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Τότε, σύμφωνα με το κριτήριο Cauchy (πρόταση 12), για κάθε $\varepsilon > 0$, θα υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 τέτοιος ώστε $|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + |a_n| < \varepsilon$, για κάθε $n, m \geq n_0$. Όμως, αφού $|a_{m+1} + a_{m+2} + a_n| \leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + |a_n|$, θα έχουμε και $|a_{m+1} + a_{m+2} + a_n| < \varepsilon$, για κάθε $n, m \geq n_0$. Επομένως (από το κριτήριο Cauchy) συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. □

Σημειώνουμε ότι το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει. Για παράδειγμα δίνουμε την ακολουθία $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Θα αποδείξουμε παρακάτω (δες παράδειγμα 2.1) ότι αυτή η ακολουθία συγκλίνει, αλλά δε συγκλίνει απόλυτα.

Πρόταση 7. *Αν η σειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *συγκλίνει απόλυτα και η ακολουθία* b_n *είναι φραγμένη, τότε η σειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ *συγκλίνει απόλυτα.*

Απόδειξη. Εφόσον η b_n είναι φραγμένη, υπάρχει αριθμός $M > 0$ τέτοιος ώστε $|b_n| < M$, για κάθε n. Αφού η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ συγκλίνει θα υπάρχει $n_0 > 0$, τέτοιος ώστε $||a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots |a_n|| < \frac{\varepsilon}{M}$, για κάθε $n, m \geq n_0$ (κριτήριο Cauchy). Επομένως, θα ισχύει και

$$||a_{m+1}b_{m+1}| + |a_{m+2}b_{m+2}| + \ldots |a_n b_n|| < \varepsilon,$$

για κάθε $n, m \geq n_0$. □

Ορισμός 3. *Δίνεται ο πραγματικός αριθμός a. Ορίζουμε τους αριθμούς*

$$a^+ = \begin{cases} a, & \text{αν } a > 0, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

και

$$a^- = \begin{cases} -a, & \text{αν } a < 0, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Πρόταση 8. *Η σειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *συγκλίνει απόλυτα, αν και μόνο αν οι σειρές των θετικών και αρνητικών μερών της* a_n*, δηλαδή οι* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^-$ *συγκλίνουν.*

Απόδειξη. Προφανώς $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$. Επομένως, αν οι σειρές $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^-$ συγκλίνουν, τότε θα συγκλίνει και η $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. Αντιστρόφως, αν συγκλίνει η $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχει n_0, τέτοιο ώστε $|a_{m+1}| + |a_m| + \cdots + |a_n| < \varepsilon$, για κάθε $n, m \geq n_0$. Όμως, αφού $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$, θα έχουμε και

$$a_{m+1}^+ + a_{m+2}^+ + \cdots + a_n^+ = a_{m+1}^+ + a_{m+2}^+ + \cdots + a_n^+ \leq |a_{m+1}| + |a_m| + \cdots + |a_n| < \varepsilon,$$

για κάθε $n, m \geq n_0$. Άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+$ συγκλίνει. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^-$. □

2 Σημαντικα κριτηρια συγκλισης Σειρων

Πρόταση 9: Κριτήριο Leibniz

Δίνεται η φθίνουσα ακολουθία $a_n \geq 0$, με $\lim_n a_n = 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ συγκλίνει.

Επίσης, αν s_n είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της a_n και $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = a$, τότε $|s_n - a| \leq a_{n+1}$, για κάθε $n \geq 0$.

Παράδειγμα 2.1. *Δίνεται η ακολουθία $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Θα αποδείξουμε ότι η a_n συγκλίνει.*

Η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών. Επομένως από το κριτήριο Leibniz συγκλίνει. □

Πρόταση 10: Κριτήριο Dirichlet

Δίνεται η φθίνουσα ακολουθία $b_n \geq 0$, με $\lim_n b_n = 0$, και η ακολουθία a_n, τέτοια ώστε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της να είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq M$, για κάθε $n, m \geq n_0$. Τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

Πρόταση 11: Κριτήριο Σύγκρισης

Έστω $0 \leq a_n \leq b_n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Τότε:

1. *Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει.*
2. *Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ αποκλίνει, τότε και η $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ αποκλίνει.*

Απόδειξη. Ορίζουμε τα μερικά αθροίσματα των σειρών, $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ και $t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Προφανώς ισχύει ότι $0 \leq s_n \leq t_n$. Αν υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ συγκλίνει και ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = t$, τότε προφανώς $0 \leq s_n \leq t_n \leq t$, αφού η b_n αποτελείται από θετικούς όρους. Επομένως η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της a_n είναι φραγμένη, άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει (κριτήριο φράγματος - πρόταση 4). Ομοίως, αν η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ αποκλίνει τότε η ακολουθία s_n δεν είναι φραγμένη και επομένως ούτε η ακολουθία, t_n, των μερικών αθροισμάτων της b_n είναι φραγμένη. Άρα η $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ αποκλίνει. □

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο σύγκρισης μπορούμε να αποφανθούμε για την σύγκλιση ή την απόκλιση πολλών σειρών συγκρίνοντάς τις με ορισμένες κλασσικές σειρές των οποίων γνωρίζουμε τη σύγκλιση, όπως για παράδειγμα την αρμονική σειρά, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$, την p-σειρά, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, την γεωμετρική σειρά και άλλες.

Πρόταση 12: Κριτήριο ρίζας του Cauchy

Έστω a_n *μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και* $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$.

1. *Αν* $0 \leq \ell < 1$, *τότε η σειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *συγκλίνει απόλυτα.*
2. *Αν* $\ell > 1$, *τότε η σειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $0 \leq \ell < 1$. Επιλέγουμε έναν αριθμό θ τέτοιο ώστε $\ell < \theta < 1$. Όμως αφού $\ell = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$ και $\theta > \ell \geq 0$, τότε το σύνολο $[0, \theta)$ θα περιέχει όλους όρους της ακολουθίας $\sqrt[n]{|a_n|}$, από ένα σημείο και πέρα. Επομένως, θα υπάρχει ένα n_0 τέτοιο ώστε $\sqrt[n]{|a_n|} < \theta$, για κάθε $n \geq n_0$. Άρα θα έχουμε $|a_n| < \theta^n$. Γνωρίζουμε όμως ότι η γεωμετρική σειρά συγκλίνει (ή απόδειξη δίνεται παρακάτω στην πρόταση 19) και

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \theta^n = \frac{\theta_0^n}{1-\theta},$$

επομένως, από το κριτήριο σύγκρισης (πρόταση 11) η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα. □

Πρόταση 13: Κριτήριο λόγου του d' Alambert

Έστω a_n *μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με* $a_n \neq 0$ *και* $\ell = \lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

1. *Αν* $0 \leq \ell < 1$, *τότε η σειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *συγκλίνει απόλυτα.*
2. *Αν* $\ell > 1$, *τότε η σειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

Σημειώνουμε ότι τόσο το κριτήριο λόγου όσο και το κριτήριο ρίζας δεν δίνουν κανένα συμπέρασμα για την σύγκλιση της σειράς, στην περίπτωση που το όριο είναι ίσο με $\ell = 1$. Υπάρχουν κάποιες σειρές με $\ell = 1$ οι οποίες συγκλίνουν και κάποιες άλλες που αποκλίνουν.

Πρόταση 14: Κριτήριο Οριακής Σύγκρισης

Δίνονται οι ακολουθίες θετικών όρων a_n και b_n. Τότε

1. *Αν* $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \ell$, *με* $0 < \ell < +\infty$, *τότε είτε και οι δύο σειρές συγκλίνουν είτε και οι δύο σειρές αποκλίνουν.*
2. $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0$, *και η* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
3. $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, *και η* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *συγκλίνει στο* $+\infty$, *τότε και η* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *συγκλίνει στο* $+\infty$.

Πρόταση 15: Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy

Δίνεται η φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, a_n, *με* $a_n \geq 0$. *Τότε η σειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *συγκλίνει, αν και μόνο αν η σειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$ *συγκλίνει.*

Πρόταση 16: Abel-Pringsheim

Δίνεται η φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, a_n, *με* $a_n \geq 0$. *Αν η σειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *συγκλίνει, τότε* $\lim_n n a_n = 0$.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση μπορούμε να αποδείξουμε με διαφορετικό τρόπο το ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει.

Ορισμός 4. *Δίνονται δύο ακολουθίες a_n και b_n. Η* ***συνέλιξη*** *(ή γινόμενο Cauchy) των a_n, b_n είναι η ακολουθία c_n που ορίζεται ως:*

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \dots a_0 b_n,$$

για $n = 0, 1, \dots$.

Πρόταση 17: Mertens

Έστω ότι οι σειρές $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *και* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *συγκλίνουν και τουλάχιστον μια από αυτές συγκλίνει απόλυτα. Αν* c_n *είναι η συνέλιξη των* a_n, b_n, *τότε η σειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ *συγκλίνει και*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Πρόταση 18: Κριτήριο Ολοκληρώματος

Δίνεται η φθίνουσα συνάρτηση $f : [n_0, +\infty) \to [0, +\infty)$. *Τότε η σειρά* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$ *συγκλίνει, αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{n_0}^{x} f(t)dt$ *υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Επιπλέον, αν η σειρά συγκλίνει τότε*

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$$

3 Κλασσικες Σειρες

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφέρουμε τις σημαντικότερες και πιο κλασσικές σειρές που χρησιμοποιούνται σε ασκήσεις και εφαρμογές. Ξεκινάμε με μια από τις πιο απλές αλλά και πιο σημαντικές σειρές: την γεωμετρική σειρά (η σειρά που προκύπτει από την γεωμετρική πρόοδο).

Πρόταση 19: Γεωμετρική Σειρά

- *Αν* $|a| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ *και* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a^n = \frac{a^{n_0}}{1-a}$.
- *Αν* $|a| \geq 1$, *η σειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε από την Α΄ Λυκείου ότι

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1},$$

για κάθε φυσικό αριθμό n. Επομένως, αν $|a| < 1$ τότε $\lim_n a^n = 0$ και η σειρά των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει στον αριθμό $\frac{1}{1-a}$. Αν $|a| \geq 1$, τότε η ακολουθία a^n δεν είναι μηδενική και επομένως η σειρά αποκλίνει. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση που $|a| < 1$ ισχύει επίσης

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{a}{1-a} \quad \text{και}$$
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a} - 1 - a - \cdots - a^{n_0-1} = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n_0}-1}{a-1} = \frac{a^{n_0}}{1-a}.$$

□

Πρόταση 20: Ο αριθμός e

Ισχύει ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Πρόταση 21: Η σειρά p

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός p.

1. *Αν $p > 1$, η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ *συγκλίνει.*

2. *Αν $p \leq 1$, η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ *αποκλίνει. Επιπλέον, η σειρά συγκλίνει στο $+\infty$.*

Απόδειξη. Για την περίπτωση που ο p είναι ακέραιος αριθμός έχουμε ήδη δει ότι η πρόταση ισχύει (παραδείγματα 1.1, 1.2). Μπορούμε να πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας το κριτήριο ολοκληρώματος. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$, με $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1η: Αν $p = 1$ τότε,

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = [\log(t)]_1^x = log(x) - log1 = log(x),$$

όπου $log(x)$ είναι η λογαριθμική συνάρτηση με βάση το e. Επομένως,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{t} dt = \lim_{x\to+\infty} log(x) = +\infty.$$

Άρα για $p = 1$ η σειρά αποκλίνει.

Περίπτωση 2η: Αν $p \neq 1$ τότε,

$$\int_0^x t^{-p} dt = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^x = \frac{x^{1-p}-1}{1-p}.$$

Επομένως, για $p > 1$ θα έχουμε

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p} dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-p}-1}{1-p} = \frac{1}{p-1},$$

ενώ για $p < 1$ θα έχουμε

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p} dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-p}-1}{1-p} = +\infty.$$

Άρα από το κριτήριο ολοκληρώματος προκύπτει ότι για $p > 1$ η σειρά συγκλίνει, ενώ για $p \leq 1$ η σειρά αποκλίνει. □

4 Ασκησεισ - Μεθοδολογια

Παράδειγμα 4.1. *Να υπολογιστούν τα αθροίσματα των σειρών*

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$,
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$.

Λύση:

1. Έχουμε μια απλή γεωμετρική σειρά με λόγο $\lambda = \frac{1}{2} < 1$. Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση 19, η σειρά συγκλίνει και
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$
2. Σε αυτή την περίπτωση η γεωμετρική σειρά έχει λόγο $\lambda = -\frac{1}{2}$, επομένως
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-(-\frac{1}{2})} = -\frac{1}{3}.$$
3. Παρατηρούμε ότι η δοσμένη σειρά είναι άθροισμα δύο γεωμετρικών σειρών:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{6^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{7}{2}.$$

□

Παράδειγμα 4.2 (Τηλεσκοπικές Σειρές). *Να υπολογιστούν τα αθροίσματα των σειρών*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}$.

Λύση: Σε τέτοιου είδους σειρές, αναλύουμε κάθε όρο της ακολουθίας σε απλά κλάσματα και παρατηρούμε ότι κάποιοι όροι διαγράφονται στο τελικό άθροισμα.

1. Για να κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα, αρκεί να βρούμε αριθμούς a, b τέτοιους ώστε να ισχύει

$$\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{a}{n+3}+\frac{b}{n+4},$$

για κάθε $n\geq 1$. Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών, αναγωγή όμοιων όρων και εξισώνοντας θα έχουμε:

$$1=a(n+4)+b(n+3)\Leftrightarrow 1=(a+b)n+4a+3b\Leftrightarrow \begin{matrix} a+b=0\\ 4a+3b=1\end{matrix}.$$

Επομένως, $a=1$ και $b=-1$ και η ανάλυση σε απλά κλάσματα δίνει τελικά

$$\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}.$$

Αν πάρουμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων θα έχουμε:

$$s_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+4}.$$

Άρα $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\lim_n s_n=\lim_n\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n+4}\right)=\frac{1}{4}$.

2. Με όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{2(n+1)}.$$

Οπότε, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων θα είναι:

$$\begin{aligned}s_n&=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{8}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2(n-2)}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{2(n+1)}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)}\to\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Άρα $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}=\frac{3}{4}$.

□

Παράδειγμα 4.3. *Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)}{n(n+1)2^n}$.

Λύση: Θα αναλύσουμε το κλάσμα σε απλούστερα κλάσματα. Αναζητούμε αριθμούς a, b για τους οποίους να ισχύει

$$\frac{n+2}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}.$$

Ακολουθούμε παρόμοια διαδικασία με το παράδειγμα 4.2:

$$\frac{n+2}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \Leftrightarrow n+2 = (a+b)n + a \Leftrightarrow \begin{matrix} a+b=1 \\ a=2 \end{matrix}.$$

Επομένως $a = 2$ και $b = -1$, οπότε

$$\frac{n+2}{n(n+1)2^n} = \frac{1}{n2^{n-1}} - \frac{1}{(n+1)2^n}.$$

Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων θα είναι:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 - \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2} - \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{2^2\cdot 3} - \frac{1}{2^3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n2^{n-1}} - \frac{1}{(n+1)2^n} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)2^n} \to 1. \end{aligned}$$

Επομένως, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)}{n(n+1)2^n} = 1.$ □

Παράδειγμα 4.4. *Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση την σειρά* $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log^p n}$, *για* $p > 0$.

Λύση: Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x\log^p x}$ και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\log^p t}dt = \lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{t\log^p t}dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{\log 2}^{\log x} \frac{1}{e^u u^p} e^u du = \lim_{x\to+\infty} \int_{\log 2}^{\log x} \frac{1}{u^p} du,$$

όπου έχουμε κάνει αλλαγή μεταβλητής $u = \log t$. Στην περίπτωση που $p \neq 1$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{t\log^p t}dt &= \lim_{x\to+\infty} \int_{\log 2}^{\log x} \frac{1}{u^p} du = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{u^{1-p}}{1-p}\right]_{\log 2}^{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log^{1-p} x}{1-p} - \frac{\log^{1-p} 2}{1-p}\right) \\ &= \begin{cases} +\infty, & p < 1 \\ \frac{1}{(p-1)\log^{p-1} 2}, & p > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Στην περίπτωση όπου $p = 1$, το ολοκλήρωμα τείνει επίσης στο $+\infty$ αφού

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\log t}dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{\log 2}^{\log x} \frac{1}{u} du = +\infty.$$

Επομένως, για $0 < p \leq 1$, η σειρά αποκλίνει, ενώ για $p > 1$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα 4.5. *Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^2}$,

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2^n}$

Λύση: Εφαρμόζουμε το κριτήριο σύγκρισης (πρόταση 11).

1. $0 \leq \frac{\cos^2(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Επομένως, αφού η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^2}$.

2. $0 \leq \frac{1}{n+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$. Επομένως, αφού η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n+n}$.

□

Παράδειγμα 4.6. *Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$,

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-n}$,

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^3+2n^2+1}}{\sqrt[4]{1+7n^{11}}}$,

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n)}{n}$.

Λύση: Εφαρμόζουμε το κριτήριο οριακής σύγκρισης (πρόταση 14). Πρέπει σε κάθε περίπτωση να βρούμε μια κατάλληλη ακολουθία της οποίας να ξέρουμε την συμπεριφορά.

1. Εδώ επιλέγουμε την ακολουθία $b_n = \frac{1}{n}$, η οποία μοιάζει πολύ με αυτήν που έχουμε, δηλαδή την $a_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ (μάλιστα για μεγάλες τιμές του n οι δύο ακολουθίες παίρνουν περίπου ίδιες τιμές). Επομένως:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1,$$

αφού $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$ (αποδεικνύεται εύκολα με το κριτήριο ρίζας ακολουθιών). Άρα, αφού η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, θα αποκλίνει και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

2. Η συγκεκριμένη σειρά μπορεί να μελετηθεί και με το απλό κριτήριο σύγκρισης, αφού $\frac{1}{n^2-n} \leq \frac{1}{n^2}$, για $n > 0$, αλλά και με χρήση της μεθόδου των τηλεσκοπικών σειρών. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης χρησιμοποιώντας την $b_n = \frac{1}{n^2}$. Επομένως:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n^2-n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2-n} \to 1.$$

Άρα, αφού η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-n}$.

3. Παρατηρούμε ότι η διαφορά των εκθετών των μεγιστοβάθμιων όρων του αριθμητή και του παρονομαστή είναι $\frac{11}{4} - \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$ (όπου αφαιρούμε τον μεγιστοβάθμιο όρο του αριθμητή από τον μεγιστοβάθμιο όρο του παρονομαστή). Επομένως διαλέγουμε την ακολουθία $b_n = \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ και θα έχουμε:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{\sqrt{n^3+2n^2+1}}{\sqrt[4]{1+7n^{11}}}}{\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}} = \frac{n^{\frac{5}{4}}\sqrt{n^3+2n^2+1}}{\sqrt[4]{1+7n^{11}}} = \frac{n^{\frac{5}{4}}n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}}{n^{\frac{11}{4}}\sqrt[4]{\frac{1}{n^4}+7}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{n^4}+7}} \to \frac{1}{\sqrt[4]{7}}.$$

Άρα, αφού η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^3+2n^2+1}}{\sqrt[4]{1+7n^{11}}}$.

4. Παίρνουμε την ακολουθία $b_n = \frac{1}{n}$ και θα έχουμε:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{\log(n)}{n}}{\frac{1}{n}} = \log(n) \to +\infty.$$

Επομένως, αφού η $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ αποκλίνει, θα αποκλίνει και η $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n)}{n} = +\infty$.

□

Παράδειγμα 4.7. *Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$,
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{-n}$.

Λύση: Σε τέτοιες σειρές (με εκθέτες που έχουν το n), εφαρμόζουμε το κριτήριο του Cauchy (πρόταση 12).

1. Παρατηρούμε ότι:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Επομένως η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ συγκλίνει απόλυτα.

2. Αφού η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$ συγκλίνει απόλυτα (ερώτημα 1), θα συγκλίνει.

3. Παρατηρούμε ότι:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}.$$

Επομένως, η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ συγκλίνει.

4. Παρατηρούμε ότι:

$$\sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{-n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}-1} \to \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

αφού $\lim_n \sqrt[n]{n} = 0$ και $\sqrt[n]{n} \geq 0$ για κάθε n. Επομένως, η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{-n}$ αποκλίνει.

□

Παράδειγμα 4.8. *Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}$,

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}}$,

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$,

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{n^{2n}}$.

Λύση: Σε τέτοιες σειρές, εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου του d' Alambert (πρόταση 13).

1. Παρατηρούμε ότι:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)!}}}{\frac{1}{\sqrt{n!}}} = \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n+1)!}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0.$$

   Επομένως η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}$ συγκλίνει απόλυτα.

2. Ομοίως.

3. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n+2}}}{\frac{(2n)!}{n^{2n}}} = \frac{(2n+2)!n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \\ &= \frac{2(2n+1)}{n+1}\frac{1}{\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^2} = \frac{n\left(4+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2} \\ &= \frac{4+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2} \to \frac{4}{e^2} < 1.\end{aligned}$$

   Επομένως η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$ συγκλίνει απόλυτα.

4. Ομοίως.

□

Παράδειγμα 4.9. *Δίνεται η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(3n)!}$. *Να αποδείξετε ότι συγκλίνει και να υπολογίσετε το άπειρο άθροισμα με σφάλμα* $\varepsilon = 0.0001$.

Λύση: Θα αποδείξουμε τη σύγκλιση με το κριτήριο λόγου:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)!}{(3n+3)!}}{\frac{n!}{(3n)!}} = \frac{n+1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \to 0,$$

άρα η σειρά συγκλίνει απόλυτα. Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \leq \frac{3n+1}{(3n+1)(3n+1)(3n+1)} \leq \frac{1}{(3n+1)^2} \leq \frac{1}{49} = \lambda,$$

για $n \geq 2$. Αν πάρουμε τους πρώτους N όρους της ακολουθίας και τους αθροίσουμε, τότε το σφάλμα υπολογισμού του ορίου της σειράς, $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(3n)!}$ θα είναι

$$
\begin{aligned}
R_N = |S - S_N| &= \left| S - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(3n)!} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{n!}{(3n)!} \right| = |a_{N+1} + a_{N+2} + \dots| \\
&\leq a_N\lambda + a_N\lambda^2 + a_N\lambda^3 + \dots = \frac{a_N\lambda}{1-\lambda},
\end{aligned}
$$

αφού $\lambda = \frac{1}{49} < 1$. Επομένως,

$$R_N \leq \frac{N!}{48(3N)!}.$$

Επειδή θέλουμε το σφάλμα να είναι μικρότερο από $\varepsilon = 0.0001$, θα επιλέξουμε N τέτοιο ώστε

$$\frac{N!}{48(3N)!} < 0.0001 \Leftrightarrow \frac{N!}{(3N)!} < 0.0048.$$

Αν ορίσουμε ως $A_n = \frac{N!}{(3N)!}$, βλέπουμε ότι

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{6} \\
A_2 &= \frac{1}{360} = 0.002777.
\end{aligned}
$$

Επιλέγουμε $N = 2$ και η ζητούμενη προσέγγιση είναι $S \approx \frac{1}{6} + \frac{1}{360} = \frac{61}{360}$. $\square$