Ακολουθιες

Το παρόν φυλλάδιο σημειώσεων ασχολείται με τη θεωρία των ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Αναφερόμαστε στην βασική έννοια της σύγκλισης και δίνουμε τα βασικότερα θεωρήματα, τα σημαντικότερα κριτήρια σύγκλισης και μεθοδολογία για την επίλυση των ασκήσεων.

1 Εισαγωγη

Ορισμός 1. *Μια **ακολουθία** (πραγματικών αριθμών) είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ προς τους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$:*

$$1 \to a_1, 2 \to a_2, \dots, n \to a_n, \dots.$$

Συνήθως (αλλά όχι απαραίτητα), οι ακολουθίες συμβολίζονται με κάποιο γράμμα συνοδευόμενο από τον δείκτη n, π.χ.: a_n, α_n, S_n. Μερικές φορές χρησιμοποιούμε ακολουθίες που έχουν ως πρώτο όρο τον a_{n_0} και όχι τον a_0. Σε αυτή την περίπτωση θα τονίζουμε ότι χρησιμοποιούμε την ακολουθία a_n με $n \geq n_0$. Ας δούμε μερικά παραδείγματα απλών ακολουθιών:

- $a_n = 2 * n$,
- $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$,
- $a_n = (-1)^n$,
- $a_n = \sin(n)$,
- $a_n = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, 4 \dots \\ 1, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$.

Εκτός από τον γενικό τύπο, μια ακολουθία μπορεί να οριστεί αναδρομικά. Για παράδειγμα, η ακολουθία $a_n = 2n$ μπορεί να ορισθεί εναλλακτικά μέσω του ακόλουθου αναδρομικού τύπου: $a_n = a_{n-1} + 2$, με $a_0 = 0$.

Ορισμός 2. *Μια ακολουθία a_n θα λέγεται **άνω φραγμένη** αν υπάρχει αριθμός $M \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε να ισχύει $a_n \leq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (δηλαδή για όλους τους όρους της ακολουθίας). Ομοίως, μια ακολουθία θα λέγεται **κάτω φραγμένη** αν υπάρχει αριθμός $M \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε να ισχύει*

$a_n \geq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μια ακολουθία θα λέγεται ***φραγμένη****, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει αριθμός $M \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε να ισχύει $|a_n| \leq M$. Ο αριθμός M καλείται φράγμα της ακολουθίας (ή άνω ή κάτω φράγμα αντίστοιχα).*

Ορισμός 3. *Μια ακολουθία a_n θα λέγεται*

- ***αύξουσα*** *αν $a_n \leq a_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*
- ***γνησίως αύξουσα*** *αν $a_n < a_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*
- ***φθίνουσα*** *αν $a_n \geq a_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*
- ***γνησίως φθίνουσα*** *αν $a_n > a_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*
- ***μονότονη*** *αν η ακολουθία είναι αύξουσα ή φθίνουσα.*
- ***γνησίως μονότονη*** *αν αν η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.*

2 Σύγκλιση

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με μια από τις σημαντικότερες μαθηματικές έννοιες, τη σύγκλιση. Αρχικά δίνουμε τον κλασσικό εψιλοντικό ορισμό και τον συνοδεύουμε με μερικές σημαντικές παρατηρήσεις και μερικά απλά παραδείγματα.

Ορισμός 4: Σύγκλιση

Θα λέμε ότι η ακολουθία a_n ***συγκλίνει*** *στον πραγματικό αριθμό ℓ, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 έτσι ώστε να ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$. Η ακολουθία a_n θα λέγεται* ***συγκλίνουσα*** *και θα γράφουμε $\lim_n a_n = \ell$ ή $a_n \to \ell$ καθώς $n \to +\infty$.*

Ο παραπάνω ορισμός εξασφαλίζει ότι αν μια ακολουθία συγκλίνει, τότε οι όροι της συγκεντρώνονται γύρω από το όριο ℓ. Πράγματι, ας θεωρήσουμε μια περιοχή γύρω από τον αριθμό ℓ, της μορφής $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$. Παίρνουμε δηλαδή ένα διάστημα με κέντρο τον αριθμό ℓ και ακτίνα ίση με ε. Ο παραπάνω ορισμός μας λέει ότι αν μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα, τότε σε κάθε διάστημα της μορφής $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας όσο μικρός και αν γίνει ο αριθμός ε. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι αν μια ακολουθία συγκλίνει στον αριθμό ℓ, τότε οσοδήποτε κοντά στον αριθμό ℓ η ακολουθία θα έχει άπειρους όρους. Στη συνέχεια μερικά απλά συμπεράσματα του παραπάνω ορισμού. Αν $\lim_n a_n = \ell$, τότε

1. Στο διάστημα $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ περιέχονται άπειροι όροι της ακολουθίας a_n, για κάθε $\varepsilon > 0$.
2. Στο διάστημα $(-\infty, \ell - \varepsilon)$ περιέχεται (το πολύ) πεπερασμένος αριθμός όρων της ακολουθίας, για κάθε $\varepsilon > 0$.
3. Στο διάστημα $(\ell + \varepsilon, +\infty)$ περιέχεται (το πολύ) πεπερασμένος αριθμός όρων της ακολουθίας, για κάθε $\varepsilon > 0$.
4. Για τα διαστήματα $(\ell - \varepsilon, \ell)$ και $(\ell, \ell + \varepsilon)$ δεν μπορούμε να εξάγουμε ασφαλή συμπεράσματα. Σε αυτά τα διαστήματα μπορεί να περιέχονται είτε άπειροι όροι της ακολουθίας, είτε πεπερασμένος αριθμός όρων, είτε κανένας όρος.

Αν δεν υπάρχει αριθμός ℓ για τον οποίο να ικανοποιούνται οι συνθήκες του ορισμού 2, θα λέμε ότι η ακολουθία **αποκλίνει**. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μερικά παραδείγματα συγκλινουσών και αποκλινουσών ακολουθιών.

Παράδειγμα 2.1. *Δίνεται η ακολουθία* $a_n = \frac{1}{n}$. *Θα αποδείξουμε ότι* $\lim_n a_n = 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω της Αρχιμήδειας ιδιότητας ξέρουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Επομένως, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $\left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Άρα $\lim_n a_n = 0$. Είναι προφανές ότι η συγκεκριμένη ακολουθία τείνει στο 0 από δεξιά, δηλαδή από τις θετικές τιμές. Σε αυτή την περίπτωση πολλές φορές θα γράφουμε $\lim_n a_n = 0^+$. Θα δούμε ότι ο συμβολισμός αυτός βοηθάει στον υπολογισμό άπειρων ορίων. Με όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι και οι ακολουθίες $a_n = \frac{1}{n^k}$, $b_n = (-1)^n \frac{1}{n^k}$ συγκλίνουν στο 0, για κάθε θετικό φυσικό αριθμό k. Μάλιστα η ακολουθία b_n παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές, σε αντίθεση με την a_n που παίρνει μόνο θετικές τιμές. Οι ακολουθίες για τις οποίες ισχύει $\lim_n a_n = 0$ ονομάζονται **μηδενικές** ακολουθίες. □

Παράδειγμα 2.2. *Δίνεται η ακολουθία* $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ άρτιος}, \\ 0, & n \text{ περιττός} \end{cases}$. *Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία* a_n *δε συγκλίνει.*

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας αριθμός ℓ για τον οποίο ισχύει ο ορισμός 2. Δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 έτσι ώστε να ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon$, για όλα τα $n \geq n_0$. Επιλέγουμε ως $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2}$. Παρατηρούμε ότι αν ο n είναι περιττός, τότε $|a_n - \ell| = |\ell| > \frac{|\ell|}{2} = \varepsilon$, το οποίο μας οδηγεί σε άτοπο. □

Παράδειγμα 2.3. *Δίνεται η ακολουθία* $a_n = n$. *Θα αποδείξουμε ότι* $\lim_n a_n = +\infty$.

Έστω $M \in \mathbb{R}$. Αν $M \neq 0$, τότε λόγω της Αρχιμήδειας ιδιότητας θα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $0 < \frac{1}{n_1} < \frac{1}{M}$. Επομένως, για τον n_1 θα ισχύει $n_1 > M$. Αν $M = 0$ τότε ο αριθμός $n_2 = 1$ είναι μεγαλύτερος του M. Αν επιλέξουμε $n_0 = \max\{1, n_1\}$, θα έχουμε $n_0 > M$. Επομένως για κάθε $a_n = n > n_0$ θα ισχύει και $n > M$. Με όμοιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι η ακολουθία $a_n = n^k$ συγκλίνει στο $+\infty$ για κάθε θετικό φυσικό αριθμό k. □

Πρόταση 1 (Μοναδικότητα του Ορίου)**.** *Αν* $\lim_n a_n = a$ *και* $\lim_n b_n = b$, *τότε αναγκαστικά* $a = b$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του ορίου, θα έχουμε υπάρχουν αριθμοί n_1, n_2, έτσι ώστε $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n > n_1$ και $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n > n_2$. Αν επιλέξουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, τότε για κάθε $n > n_0$, θα έχουμε:

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon.$$

Επομένως, αποδείξαμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό $\varepsilon > 0$, έχουμε $|a - b| < \varepsilon$. Αυτό βέβαια ισχύει μόνο όταν $|a - b| = 0$. (Αν $|a - b| \neq 0$, τότε για τον $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$, δεν θα μπορούσε να ισχύει η σχέση που αποδείξαμε.) □

Πρόταση 2. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό του ορίου για $\varepsilon = 1$, θα υπάρχει n_0 έτσι ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει $|a_n - \ell| < 1$, όπου $\ell = \lim_n a_n$. Όμως $|a_n - \ell| > |a_n| - |\ell|$. Επομένως, για κάθε $n > n_0$, έχουμε $|a_n| - |\ell| < 1$ ή ισοδύναμα, $|a_n| < |\ell| + 1$. Επομένως ο αριθμός $M = \max\{a_0, a_1, \ldots, a_{n_0}, |\ell| + 1\}$ είναι ένα άνω φράγμα της ακολουθίας. □

Πρόταση 3. *Δίνονται οι συγκλίνουσες ακολουθίες a_n, b_n, με $\lim_n a_n = a$, $\lim_n b_n = b$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Η ακολουθία $\lambda a_n + \mu b_n$ είναι συγκλίνουσα με $\lim_n (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b$.*
2. *Η ακολουθία $a_n b_n$ είναι συγκλίνουσα με $\lim_n (a_n b_n) = ab$.*
3. *Αν $b \neq 0$ και $b_n \neq 0$, για $n > n_0$ τότε η ακολουθία $\frac{a_n}{b_n}$ είναι συγκλίνουσα, με $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.*
4. *Έστω k ένας θετικός ακέραιος. Αν $a_n \geq 0$ για $n > n_0$ τότε η ακολουθία $\sqrt[k]{a_n}$ συγκλίνει και ισχύει $\lim_n \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$.*
5. *Η ακολουθία $|a_n|$ συγκλίνει και ισχύει $\lim_n |a_n| = |a|$.*

Απόδειξη. Όλες οι αποδείξεις βασίζονται στον ορισμό. Θεωρούμε ένα πραγματικό αριθμό $\varepsilon > 0$.

1. Για την πρώτη ιδιότητα: Αφού $\lim_n a_n = a$, $\lim_n b_n = b$, τότε θα υπάρχουν θετικοί ακέραιοι n_1, n_2 τέτοιοι ώστε $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2\lambda}$ για κάθε $n > n_1$ και $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2\mu}$ για κάθε $n > n_2$. Επομένως για κάθε $n > \max\{n_1, n_2\}$ θα έχουμε

$$|\lambda a_n + \mu b_n - \lambda a - \mu b| \leq |\lambda a_n - \lambda a| + |\mu b_n - \mu b| < \lambda \frac{\varepsilon}{2\lambda} + \mu \frac{\varepsilon}{2\mu} = \varepsilon.$$

   Από την τελευταία σχέση προκύπτει άμεσα ότι $\lim_n (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b$.

2. Για την ιδιότητα του πολλαπλασιασμού έχουμε: Αφού $\lim_n a_n = a$, $\lim_n b_n = b$, τότε θα υπάρχουν θετικοί ακέραιοι n_1, n_2 τέτοιοι ώστε $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|+1}$ για κάθε $n > n_1$ και $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M_a}$ για κάθε $n > n_2$, όπου M_a ένα άνω φράγμα της ακολουθίας a_n. Επομένως για κάθε $n > \max\{n_1, n_2\}$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\ &\leq |a_n| \frac{\varepsilon}{2|M_a|} + |b| \frac{\varepsilon}{2|b| + 1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

3. Για το πηλίκο έχουμε: Αφού $\lim_n a_n = a$, $\lim_n b_n = b$, τότε θα υπάρχουν θετικοί ακέραιοι n_1, n_2, n_3 τέτοιοι ώστε $|a_n - a| < \frac{\varepsilon|b|}{2}$ για κάθε $n > n_1$ και $|b_n - b| < \frac{\varepsilon|b|^2}{4|M_a|}$ για κάθε $n > n_2$ και $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ για κάθε $n > n_3$. Προσέξτε πως γνωρίζουμε ότι $b \neq 0$, αλλιώς δε θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του ορίου με αυτό τον τρόπο. Επίσης, ο αριθμός $M_a > 0$ είναι ένα θετικό άνω φράγμα της ακολουθίας a_n. Όσον αφορά το $|b_n|$, για κάθε $n > n_3$ έχουμε:

$$|b_n| = |b_n - b + b| \geq |b| - |b_n - b| = |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

Έτσι για κάθε $n > \max n_1, n_2, n_3$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_n b - a b_n}{b b_n}\right| = \frac{|a_n b - a b_n|}{|b||b_n|} = \frac{|a_n b - a_n b_n + a_n b_n - a b_n|}{|b||b_n|} \\
&\leq \frac{|a_n||b_n - b| + |b_n||a_n - a|}{|b||b_n|} = \frac{|a_n||b_n - b|}{|b||b_n|} + \frac{|a_n - a|}{|b|} \\
&\leq \frac{2|M_a||b_n - b|}{|b|^2} + \frac{|a_n - a|}{|b|} \qquad \left(\text{αφού } |b_n| > \frac{|b|}{2}\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

4. Για την τελευταία ιδιότητα αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$.

$\square$

Πρέπει να τονίσουμε ότι το αντίστροφο της πρότασης δεν ισχύει σε καμιά από τις 4 περιπτώσεις. Για παράδειγμα, οι ακολουθίες $a_n = (-1)^n$ και $b_n = (-1)^{n+1}$ δε συγκλίνουν, αλλά το άθροισμά τους είναι η σταθερή ακολουθία $c_n = 0$, η οποία προφανώς συγκλίνει στο 0. Παρόμοια παραδείγματα μπορούμε να βρούμε σε όλες τις περιπτώσεις. Ιδιαίτερα για την περίπτωση της απόλυτης τιμής έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 4. *Αν η ακολουθία $|a_n|$ είναι μηδενική τότε και η a_n είναι μηδενική.*

Απόδειξη. Αν $\lim_n |a_n| = 0$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχει n_0 τέτοιος ώστε $|a_n| < \varepsilon$, για κάθε $n > n_0$. Επομένως θα ισχύει και $\lim_n a_n = 0$. $\square$

Πρόταση 5. *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Επιπλέον ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Αν η a_n είναι αύξουσα και φραγμένη, τότε $\lim_n a_n = \sup_n a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

2. *Αν η a_n είναι φθίνουσα και φραγμένη, τότε $\lim_n a_n = \inf_n a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Απόδειξη. Θα δώσουμε την απόδειξη για την πρώτη περίπτωση μόνο (της αύξουσας ακολουθίας). Ορίζουμε το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ το οποίο είναι μη κενό και φραγμένο. Επομένως, από την ιδιότητα της πληρότητας (Π14) των πραγματικών αριθμών, θα υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a = \sup_n a_n$. Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$, εφ' όσον $a = \sup_n a_n$, θα υπάρχει κάποιο n_0 έτσι ώστε $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a$. Επιπλέον, αφού η ακολουθία είναι αύξουσα θα ισχύει $a_n > a_{n_0}$, για κάθε $n > n_0$. Άρα, $a - \varepsilon < a_{n_0} < a_n \leq a$, δηλαδή $|a_n - a| < \varepsilon$, για κάθε $n > n_0$. $\square$

Σημειώνουμε ότι το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Επίσης, τονίζουμε ότι και οι δύο προϋποθέσεις του θεωρήματος είναι απαραίτητες. Υπάρχουν φραγμένες και μη μονότονες ακολουθίες που αποκλίνουν (π.χ. η $a_n = (-1)^n$), ενώ υπάρχουν φραγμένες και μη μονότονες ακολουθίες που συγκλίνουν (π.χ. η $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$). Τέλος, υπάρχουν μονότονες και μη φραγμένες ακολουθίες που αποκλίνουν (π.χ. η $a_n = n$).

Πρόταση 6: Ο αριθμός e

Η ακολουθία $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ συγκλίνει. Το όριό της είναι ο γνωστός αριθμός e.

Ορισμός 5. *Έστω a_n μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ένα διατεταγμένο υποσύνολο των φυσικών αριθμών, $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \ldots$, ορίζει μια* **υπακολουθία**, *a_{k_n}, της ακολουθίας a_n.*

Για παράδειγμα, μερικές από τις υπακολουθίες της $a_n = n$ είναι:

- $a_{2n} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$,
- $a_{2n+1} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$,
- $a_{3n} = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$.

Η απόδειξη των επόμενων προτάσεων είναι άμεση (από τον ορισμό). Σημειώνουμε ότι οι προτάσεις 7(β) και 7(γ) αποτελούν τα απλούστερα κριτήρια για να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία δε συγκλίνει.

Πρόταση 7: Σύγκλιση Υπακολουθιών

α *Αν μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα με $\lim_n a_n = a$, τότε κάθε υπακολουθία της, a_{k_n}, είναι επίσης συγκλίνουσα και $\lim_n a_{k_n} = a$.*

β *Αν μια ακολουθία, a_n, έχει μια υπακολουθία, a_{k_n}, που δε συγκλίνει, τότε ούτε η ακολουθία a_n συγκλίνει.*

γ *Αν μια ακολουθία, a_n, έχει δύο υπακολουθίες, a_{k_n} και a_{l_n}, οι οποίες συγκλίνουν σε διαφορετικά σημεία, δηλαδή ισχύει $\lim_n a_{k_n} = a_1$ και $\lim_n a_{l_n} = a_2$, με $a_1 \neq a_2$, τότε η ακολουθία a_n δε συγκλίνει.*

Παράδειγμα 2.4. *Δίνεται η ακολουθία $a_n = (-1)^n$. Θα αποδείξουμε ότι η a_n αποκλίνει.*

Θεωρούμε τις υπακολουθίες $a_{2n} = 1$ και $a_{2n+1} = -1$. Προφανώς οι δύο υπακολουθίες συγκλίνουν σε διαφορετικό αριθμό. Επομένως, η ακολουθία a_n αποκλίνει. □

Πρόταση 8. *Κάθε ακολουθία a_n περιέχει μια μονότονη υπακολουθία.*

Απόδειξη. Θα χρειαστούμε την έννοια του σημείου κορυφής. Αν a_n είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, λέμε ότι ο αριθμός k είναι **σημείο κορυφής** της ακολουθίας a_n, αν ισχύει $a_k \geq a_m$, για κάθε $m \geq k$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Η ακολουθία a_n έχει άπειρα το πλήθος σημεία κορυφής, $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \ldots$. Τότε η υπακολουθία a_{k_n} είναι φθίνουσα. Πράγματι, αφού το k_n είναι σημείο κορυφής, θα ισχύει $a_{k_n} \geq a_m$ για κάθε $m > k_n$. Επομένως, αφού $k_{n+1} > k_n$ θα έχουμε $a_{k_n} \geq a_{k_{n+1}}$.

Περίπτωση 2: Η ακολουθία a_n έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων κορυφής. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένας φυσικός αριθμός k_1 πέρα από τον οποίο η a_n δεν έχει σημεία κορυφής. Δηλαδή για κάθε $k \geq k_1$ ο k δεν είναι σημείο κορυφής. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την πληροφορία για να κατασκευάσουμε μια αύξουσα υπακολουθία της a_n με επαγωγική διαδικασία. Ο πρώτος όρος της εν λόγω υπακολουθίας είναι ο a_{k_1}. Αφού ο k_1 δεν είναι σημείο κορυφής, θα υπάρχει κάποιος δείκτης $k_2 > k_1$ τέτοιος ώστε $a_{k_2} > a_{k_1}$. επειδή ούτε το k_2 είναι σημείο κορυφής, θα υπάρχει κάποιος δείκτης $k_3 > k_2$ τέτοιος ώστε $a_{k_3} > a_{k_2}$ κ.ο.κ. □

Θεώρημα 9: Bolzano-Weirstrass

Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση από τις προτάσεις 8 και 5. Σημειώνουμε την άμεση χρήση της ιδιότητας της πληρότητας. □

3 Κριτηρια Συγκλισης

Όπως είδαμε στις αποδείξεις των θεωρημάτων, η χρήση του ορισμού για την αναζήτηση της ύπαρξης ενός ορίου, δεν είναι εύκολη υπόθεση. Στη συνέχεια θα παραθέσουμε τα βασικότερα κριτήρια σύγκλισης, τα οποία μας παρέχουν εύχρηστα εργαλεία για να αποδείξουμε αν μια ακολουθία συγκλίνει ή όχι. Το πρώτο από αυτά τα κριτήρια το είδαμε στην πρόταση 5 (κάθε φραγμένη και μονότονη ακολουθία συγκλίνει).

Πρόταση 10: Κριτήριο Παρεμβολής

Δίνονται οι ακολουθίες a_n, b_n, c_n, έτσι ώστε $a_n \leq c_n \leq b_n$ για κάθε $n > k_0$ (k_0 φυσικός). Αν οι ακολουθίες a_n, b_n συγκλίνουν και $\lim_n a_n = \lim_n b_n = \ell$, τότε συγκλίνει και η ακολουθία c_n και $\lim_n c_n = \ell$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό των ορίων των a_n, b_n, συμπεραίνουμε ότι θα υπάρχουν θετικοί ακέραιοι n_1, n_2 τέτοιοι ώστε $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$, για κάθε $n > n_1$ και $|b_n - \ell| \leq \varepsilon$, για κάθε $n > n_2$. Αφαιρώντας τον αριθμό ℓ από όλα τα μέλη της διπλής ανισότητας παίρνουμε $a_n - \ell < c_n - \ell < b_n - \ell$. Επομένως, για κάθε $n > \max\{n_1, n_2, k_0\}$ θα έχουμε $-\varepsilon < a_n - \ell < c_n - \ell < b_n - \ell < \varepsilon$. Άρα $|c_n - \ell| < \varepsilon$. □

Πόρισμα 10.1: Κριτήριο Παρεμβολής για μηδενικές ακολουθίες

Δίνονται οι ακολουθίες a_n, b_n, έτσι ώστε $|a_n| \leq |b_n|$ για κάθε $n > k_0$ (k_0 φυσικός). Αν η ακολουθία b_n είναι μηδενική τότε και η ακολουθία a_n είναι μηδενική.

Πόρισμα 10.2: Μηδενική επί φραγμένη

Δίνεται η μηδενική ακολουθία a_n και η φραγμένη ακολουθία b_n. Τότε, η ακολουθία $a_n b_n$ είναι μηδενική.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται μέσω του κριτηρίου παρεμβολής. Αφού η b_n είναι φραγμένη θα ισχύει $|b_n| < M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου M ένα φράγμα της ακολουθίας. Επομένως, $|a_n b_n| < M|a_n|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το αποτέλεσμα προκύπτει από το πόρισμα 10.1. □

Πρόταση 11: Γεωμετρική ακολουθία

Αν $0 < \lambda < 1$ και k οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός, τότε οι ακολουθίες $a_n = \lambda^n$ και $b_n = n^k \lambda^n$ είναι μηδενικές.

Απόδειξη. Η ακολουθία a_n είναι φθίνουσα ($a_{n+1} = \lambda^{n+1} < \lambda^n = a_n$) και κάτω φραγμένη από το 0, επομένως συγκλίνει. Αν υποθέσουμε ότι $\lim_n a_n = \ell$, τότε αφού $a_n = \lambda a_{n+1}$, θα έχουμε $\ell = \lambda\ell$. Επομένως $\ell = 0$. Για την ακολουθία b_n διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Αν $k \leq 0$, τότε $0 < n^k\lambda^n \leq \lambda^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε $\lim_n b_n = 0$.

Αν $k > 0$, τότε αφού $\lambda < 1$, θα έχουμε $\frac{1}{\lambda} > 1$ και άρα θα υπάρχει $\beta > 0$ τέτοιος ώστε $\frac{1}{\lambda} = 1 + \beta$. Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα θα έχουμε:

$$\lambda^n = \frac{1}{(1+\beta)^n} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \beta^i} \leq \frac{1}{\binom{n}{k+1} \beta^{k+1}} = \frac{1}{\frac{\beta^{k+1}}{(k+1)!}(n-k)(n-k+1)\dots(n-1)n}$$

για κάποιο $k_0 < \frac{n}{2}$. Επομένως, χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι το γινόμενο έχει $k+1$ όρους μεγαλύτερους του $\frac{n}{2}$ παίρνουμε

$$\lambda^n \leq \frac{1}{\frac{\beta^{k+1}}{(k+1)!}\left(\frac{n}{2}\right)^{k+1}} = (k+1)!\left(\frac{2}{\beta}\right)^{k+1}\frac{1}{n^{k+1}}.$$

Τελικά θα έχουμε

$$n^k\lambda^n \leq (k+1)!\left(\frac{2}{\beta}\right)^{k+1}\frac{1}{n}, \text{ για } n > 2k.$$

Άρα (χρησιμοποιώντας το κριτήριο παρεμβολής) παίρνουμε ότι $\lim n^k\lambda^n = 0$. □

Πρόταση 12: Κριτήριο Ρίζας

Δίνεται η ακολουθία a_n (αποτελούμενη από μη αρνητικούς όρους), με $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, όπου $a \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = a$.

Πρόταση 13: Κριτήριο Λόγου

Δίνεται η ακολουθία a_n, με $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Αν $a < 1$, τότε $\lim_n a_n = 0$, αν $a > 1$, τότε η a_n αποκλίνει. (Αν $a = 1$, δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για τη σύγκλιση)

Πρόταση 14: Κριτήριο Cauchy

Δίνεται η ακολουθία a_n, με $\lim_n a_n = a$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Τότε $\lim_n \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} = a$.

Πρόταση 15: Αντίστροφο κριτήριο Cauchy για μονότονες ακολουθίες

Δίνεται η μονότονη ακολουθία a_n, με $\lim_n \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} = a$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Τότε $\lim_n a_n = a$.

Πρόταση 16

Δίνεται η ακολουθία a_n, με $\lim_n (a_n - a_{n-1}) = a$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Τότε $\lim_n \frac{a_n}{n} = a$.

4 Απειρα ορια

Ανάμεσα στις αποκλίνουσες ακολουθίες υπάρχουν κάποιες οι οποίες παίρνουν τιμές που αυξάνονται απεριόριστα (ή μειώνονται απεριόριστα). Αυτές οι ακολουθίες θα λέμε ότι συγκλίνουν στο $+\infty$ (ή στο $-\infty$ αντίστοιχα).

Ορισμός 6: Σύγκλιση στο άπειρο

*Θα λέμε ότι η ακολουθία a_n **συγκλίνει στο** $+\infty$, αν για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 έτσι ώστε να ισχύει $a_n > M$, για κάθε $n \geq n_0$. Θα γράφουμε $\lim_n a_n = +\infty$ ή $a_n \to +\infty$ καθώς $n \to +\infty$. Θα λέμε ότι η ακολουθία a_n **συγκλίνει στο** $-\infty$, αν για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 έτσι ώστε να ισχύει $a_n < M$, για κάθε $n \geq n_0$. Θα γράφουμε $\lim_n a_n = -\infty$ ή $a_n \to -\infty$ καθώς $n \to +\infty$.*

Όπως και στην περίπτωση των συναρτήσεων που μελετήθηκε στο Λύκειο, είναι χρήσιμο να ορίσουμε κάποιους συμβολισμούς που διευκολύνουν τον υπολογισμό τέτοιων ορίων. Για παράδειγμα θα γράφουμε $\lim_n a_n = 0^+$, αν η ακολουθία είναι μηδενική αλλά τελικά (δηλαδή από κάποιον όρο και πάνω) παίρνει μόνο θετικές τιμές. Αντίστοιχα, θα γράφουμε $\lim_n a_n = 0^-$, αν η ακολουθία είναι μηδενική αλλά τελικά (δηλαδή από κάποιον όρο και πάνω) παίρνει μόνο αρνητικές τιμές. Επίσης, ισχύουν οι πράξεις:

1. $\frac{1}{0^+} = +\infty$, $\frac{1}{0^-} = -\infty$. Αν $\lim_n a_n = 0$ και η a_n παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές (τελικά) τότε το όριο της $\frac{1}{a_n}$ δεν υπάρχει.

2. $\frac{1}{+\infty} = 0^+$, $\frac{1}{-\infty} = 0^-$.

3. $0^+ \cdot \theta = 0^+$, $0^+ \cdot (-\theta) = 0^-$, $0^- \cdot \theta = 0^-$, $0^- \cdot (-\theta) = 0^+$, για οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό θ.

4. $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$, $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$. Δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για τις πράξεις $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$ (είναι όπως λέμε απροσδιόριστες μορφές).

5. $(+\infty) + a = (+\infty)$, $(-\infty) + a = (-\infty)$, για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό a.

6. $(+\infty) \cdot \theta = (+\infty)$, $(+\infty) \cdot (-\theta) = (-\infty)$, $(-\infty) \cdot \theta = (-\infty)$, $(-\infty) \cdot (-\theta) = (+\infty)$, για οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό θ.

7. $(+\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty)$, $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty)$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = (+\infty)$.

8. $(+\infty)^q = (+\infty)$, για κάθε $q > 0$. Για $q < 0$, έχουμε $(+\infty)^q = 0$.

9. $(-\infty)^\nu = (+\infty)$, για κάθε άρτιο φυσικό αριθμό ν. $(-\infty)^\nu = (-\infty)$, για κάθε περιττό φυσικό αριθμό ν. Επιπλέον, $(-\infty)^{-\nu} = 0^+$ για κάθε άρτιο φυσικό αριθμό ν και $(-\infty)^{-\nu} = 0^-$ για κάθε περιττό φυσικό αριθμό ν.

10. $\theta^{+\infty} = +\infty$, $\theta^{-\infty} = 0^+$, για κάθε $\theta > 1$. Για $0 < \theta < 1$, $\theta^{+\infty} = 0^+$, $\theta^{-\infty} = +\infty$. Τέλος, $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$ και $(+\infty)^{-\infty} = 0^+$.

11. Τα όρια $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$, $0^{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$ είναι απροσδιόριστες μορφές.

Πρόταση 17: Κριτήριο Παρεμβολής στο άπειρο

- *Δίνονται οι ακολουθίες a_n, b_n, έτσι ώστε $a_n \leq b_n$ για κάθε $n > k_0$ (k_0 φυσικός). Αν $\lim_n b_n = -\infty$, τότε και $\lim_n a_n = -\infty$.*
- *Δίνονται οι ακολουθίες a_n, b_n, έτσι ώστε $a_n \leq b_n$ για κάθε $n > k_0$ (k_0 φυσικός). Αν $\lim_n a_n = +\infty$, τότε και $\lim_n b_n = +\infty$.*

Πρόταση 18: Γεωμετρική ακολουθία με $\lambda > 1$

Αν $\lambda > 1$ και k οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός, τότε οι ακολουθίες $a_n = \lambda^n$ και $b_n = n^k \lambda^n$ συγκλίνουν στο $+\infty$.

5 Αλλα κριτηρια συγκλισης

Πρόταση 19: Κριτήριο Stoltz

Δίνεται η ακολουθία a_n και η γνήσια μονότονη ακολουθία b_n με $\lim_n b_n = +\infty$. Αν $\lim_n \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = a$, όπου $a \in \mathbb{R}$ ή $a = +\infty$, τότε $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = a$.

Πρόταση 20: Κριτήριο Πραγματικών Συναρτήσεων

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $y = f(x)$. Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ με $a \in \mathbb{R}$, ή $a = \pm\infty$, τότε υπάρχει και το όριο της ακολουθίας $a_n = f(n)$ και ισχύει $\lim_n a_n = a$.

6 Βασικες Ακολουθιες

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφερθούμε σε μια σημαντική κατηγορία ακολουθιών, τις λεγόμενες βασικές ακολουθίες, οι οποίες ουσιαστικά ταυτίζονται με τις συγκλίνουσες ακολουθίες.

Ορισμός 7. *Μια ακολουθία a_n λέγεται* ***βασική*** *ή* ***ακολουθία Cauchy*** *αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 τέτοιος ώστε $|a_n - a_m| < \varepsilon$, για κάθε $n, m > n_0$.*

Πρόταση 21: Βασικές Ακολουθίες

Μια ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν είναι βασική.

7 Παραδειγματα - Μεθοδολογια

Αφού παρουσιάσαμε τα σημαντικότερα αποτελέσματα πάνω στη σύγκλιση ακολουθιών, στη συνέχεια θα δώσουμε μερικά παραδείγματα για να παρουσιάσουμε τις βασικότερες μεθόδους επίλυσης ασκήσεων.

Παράδειγμα 7.1. *Δίνεται η ακολουθία* a_n *με* $\lim_n a_n = 2$. *Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω σύνολα περιέχουν πεπερασμένο πλήθος αριθμών και ποια περιέχουν άπειρο πλήθος αριθμών.*

1. $A_1 = \{n \in \mathbb{N} : \ a_n < 2.0001\}$,
2. $A_2 = \{n \in \mathbb{N} : \ a_n > 2.005\}$,
3. $A_3 = \{n \in \mathbb{N} : \ a_n < 1.99\}$,
4. $A_4 = \{n \in \mathbb{N} : \ 1.99 < a_n < 2.02\}$,
5. $A_5 = \{n \in \mathbb{N} : \ a_n \leq 2\}$.

Λύση: Θα εφαρμόσουμε τον ορισμό του ορίου. Η βασική λογική αυτής της άσκησης είναι ότι όσο κοντά και είμαστε στο όριο (δηλαδή στον αριθμό 2) βρίσκουμε πάντα άπειρο πλήθος όρων της ακολουθίας.

1. Το σύνολο A_1 περιέχει άπειρο πλήθος αριθμών. Πράγματι, αν εφαρμόσουμε τον ορισμό του ορίου για $\varepsilon = 0.0001$, τότε θα υπάρχει ένας αριθμός n_1 τέτοιος ώστε να ισχύει $|a_n - 2| < 0.0001$, ή ισοδύναμα $1.9999 < a_n < 2.0001$ για κάθε $n > n_1$. Επομένως, το σύνολο A_1 περιέχει τουλάχιστον τους αριθμούς $n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots$.

2. Με όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι το σύνολο A_2 έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Αν θέσουμε $\varepsilon = 0.005$ στον ορισμό του ορίου, τότε θα υπάρχει φυσικός αριθμός n_2, έτσι ώστε $|a_n - 2| < 0.005$, ή $1.995 < a_n < 2.005$ για κάθε $n > n_2$. Επομένως το σύνολο A_2 μπορεί να περιέχει μόνο τους αριθμούς $0, 1, \ldots, n_2$. Άρα το A_2 είναι κενό, είτε περιέχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων (το πολύ $n_2 + 1$).

3. Ομοίως για $\varepsilon = 0.01$ μπορούμε να αποδείξουμε ότι το A_3 περιέχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων (ή είναι το κενό σύνολο).

4. Θέτοντας $\varepsilon = 0.01$ όπως στο προηγούμενο ερώτημα, βλέπουμε ότι στο διάστημα $(1.99, 2.01)$ περιέχονται άπειροι όροι της ακολουθίας. Επομένως το σύνολο A_4 περιέχει άπειρο πλήθος στοιχείων.

5. Για το σύνολο A_5 δεν μπορούμε να εξάγουμε ασφαλές συμπέρασμα. Για παράδειγμα, αναφέρθηκε ήδη ότι το διάστημα $(1.99, 2.01)$ περιέχει άπειρους όρους της ακολουθίας. Όμως δεν ξέρουμε που ακριβώς βρίσκονται αυτοί οι όροι. Αν όλοι οι όροι βρίσκονται στο διάστημα $(2, 2.01)$, τότε το A_5 περιέχει το πολύ πεπερασμένο πλήθος αριθμών. Υπάρχει όμως περίπτωση να περιέχονται όλοι οι όροι στο διάστημα $(1.99, 2)$, οπότε το A_5 περιέχει άπειρους όρους. Στην πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί (για παράδειγμα) η ακολουθία $a_n = 2 + \frac{1}{n}$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση η ακολουθία $b_n = 2 - \frac{1}{n}$. Τέλος, υπάρχει περίπτωση και το διάστημα $(2,\ 2.01)$ αλλά και το διάστημα $(1.99, 2)$ να περιέχουν άπειρους όρους, όπως συμβαίνει για παράδειγμα με την ακολουθία $c_n = 2 + (-1)^n \frac{1}{n}$.

□

Παράδειγμα 7.2. *Αποδείξτε με τη βοήθεια του ορισμού ότι*

1. $\lim_n \frac{1}{n^2} = 0$,
2. $\lim_n \frac{1}{2^n} = 0$,
3. *Να υπολογιστεί το* n_0 *για το οποίο* $\frac{1}{2^n} < 0.01$ *για κάθε* $n > n_0$.
4. $\lim_n \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2}$.

Λύση: Ο υπολογισμός των παραπάνω ορίων μπορεί να γίνει πολύ ευκολότερα χρησιμοποιώντας τα κριτήρια. Σε αυτή την άσκηση θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τον εψιλοντικό ορισμό του ορίου.

1. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλουμε να βρούμε ένα n_0 (το οποίο να εξαρτάται από το ε) τέτοιο ώστε $|a_n - 0| < \varepsilon$, για κάθε $n > n_0$. Παίρνουμε λοιπόν την ανισότητα $|a_n - 0| < \varepsilon$ και προσπαθούμε να λύσουμε ως προς n.

   $$|a_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

   Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ένα $n_0 > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ (ένας τέτοιος αριθμός είναι για παράδειγμα ο $\left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right]+1)$, τέτοιο ώστε $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$, για κάθε $n > n_0 > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$. Επομένως, $\lim_n \frac{1}{n^2} = 0$.

2. $\varepsilon > 0$. Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, θέλουμε να βρούμε ένα n_0 (το οποίο να εξαρτάται από το ε) τέτοιο ώστε $|a_n - 0| < \varepsilon$, για κάθε $n > n_0$. Παίρνουμε λοιπόν την ανισότητα $|a_n - 0| < \varepsilon$ και προσπαθούμε να λύσουμε ως προς n.

   $$|a_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

   Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ένα $n_0 > \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ (ένας τέτοιος αριθμός είναι για παράδειγμα ο $\left[\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]+1)$, τέτοιο ώστε $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, για κάθε $n > n_0$. Επομένως, $\lim_n \frac{1}{2^n} = 0$.

3. Προφανώς $n_0 = \left[\log_2\left(\frac{1}{0.01}\right)\right] + 1 = 7$.

4. Έστω $\varepsilon > 0$. Λύνουμε την ανισότητα $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ ως προς n:

   $$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-1}{4n+6}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{4n+6} < \varepsilon \Leftrightarrow 4n+6 > \frac{1}{\varepsilon}$$
   $$n > \frac{1-6\varepsilon}{4\varepsilon}.$$

   Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη, όπως είδαμε στα δύο προηγούμενα παραδείγματα.

□

Παράδειγμα 7.3. *Δίνεται η ακολουθία* $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$, *με* $a_1 = \sqrt{3}$. *Να αποδείξετε ότι συγκλίνει και να βρείτε το όριό της.*

Λύση: Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση είναι μονότονη και φραγμένη, επομένως (σύμφωνα με την πρόταση 5) θα συγκλίνει. Παρατηρούμε ότι οι πρώτοι όροι της είναι $a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = \sqrt{3\sqrt{3}}$, $a_3 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$. Άρα φαίνεται ότι η ακολουθία είναι αύξουσα. Επίσης, αν η ακολουθία συγκλίνει, τότε $\lim_n a_n = \lim_n a_{n+1} = \ell$, αφού η a_{n+1} είναι υπακολουθία της a_n. Επομένως, από τη σχέση $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$ (παίρνοντας όρια) καταλήγουμε στην $\ell = \sqrt{3\ell}$, οπότε $\ell = 3$ ή $\ell = 0$.

Βήμα 1 (Μονοτονία): Θα αποδείξουμε (με επαγωγή) ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή ότι $a_n < a_{n+1}$ για κάθε n. Για $n = 1$ παρατηρούμε ότι πράγματι $a_1 < a_2$. Έστω ότι για κάποιο τυχαίο ν ισχύει $a_\nu < a_{\nu+1}$. Για να ολοκληρώσουμε την επαγωγή, θα αποδείξουμε ότι $a_{\nu+1} < a_{\nu+2}$. Παρατηρούμε ότι $a_{\nu+2} = \sqrt{3\sqrt{a_{\nu+1}}}$ και $a_{\nu+1} = \sqrt{3\sqrt{a_\nu}}$. Επομένως θα έχουμε

$$a_{\nu+1} < a_{\nu+2} \Leftrightarrow \sqrt{3\sqrt{a_\nu}} < \sqrt{3\sqrt{a_{\nu+1}}} \Leftrightarrow a_\nu < a_{\nu+1},$$

το οποίο ισχύει. Άρα η ακολουθία είναι πράγματι γνησίως αύξουσα.

Βήμα 2 (Φράξιμο): Επειδή η ακολουθία έχει πρώτο όρο τον $a_1 = \sqrt{3}$ και είναι γνησίως αύξουσα, αποκλείεται να έχει όριο το $\ell = 0$. Επομένως, το όριο θα είναι $\ell = 3$. Θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι ο αριθμός 3 είναι ένα άνω φράγμα της ακολουθίας. Δηλαδή $a_n < 3$ για κάθε n. Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι επαγωγή. Για $n = 1$, η σχέση ισχύει, αφού $a_1 = \sqrt{3} < 3$. Υποθέτουμε ότι για $n = \nu$ ισχύει $a_\nu < 3$ και θα αποδείξουμε ότι $a_{\nu+1} < 3$. Πράγματι, $a_{\nu+1} = \sqrt{3a_n} < \sqrt{3 \cdot 3} = 3$, όπου χρησιμοποιήσαμε το προηγούμενο επαγωγικό βήμα ($a_\nu < 3$). Επομένως ένα άνω φράγμα της ακολουθίας είναι ο αριθμός 3.

Βήμα 3 (Υπολογισμός ορίου): Όπως ήδη αναφέραμε, αφού η a_{n+1} είναι υπακολουθία της a_n, τότε $\lim_n a_n = \lim_n a_{n+1} = \ell$. Επομένως, από τη σχέση $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$ (παίρνοντας όρια) καταλήγουμε στο ότι $\ell = 3$ ή $\ell = 0$. Επειδή όμως η ακολουθία έχει πρώτο όρο τον $a_1 = \sqrt{3}$ και είναι γνησίως αύξουσα, η τιμή $\ell = 0$ απορρίπτεται. Επομένως, το όριο θα είναι $\ell = 3$. □

Παράδειγμα 7.4. *Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών:*

1. $a_n = \frac{2^n}{3^n+4^n}$,
2. $b_n = \frac{5^n}{2^n+4^n}$,
3. $c_n = \frac{5^n}{2^n+2\cdot 5^n}$.

Λύση:

1. Σε αυτού του τύπου τις ακολουθίες διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με την εκθετική συνάρτηση με την ταχύτερη σύγκλιση (δηλαδή με τον μεγαλύτερο αριθμό βάσης). Επομένως, για την πρώτη ακολουθία διαιρούμε με τον όρο 4^n και έχουμε:

$$a_n = \frac{2^n}{3^n + 4^n} = \frac{\frac{2^n}{4^n}}{\frac{3^n}{4^n} + \frac{4^n}{4^n}} = \frac{\left(\frac{2}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} \to 0,$$

αφού για την γεωμετρική ακολουθία γνωρίζουμε ότι $\lim_n a^n = 0$, αν $0 < a < 1$.

2. Για την δεύτερη ακολουθία έχουμε:

$$b_n = \frac{5^n}{2^n + 4^n} = \frac{\frac{5^n}{5^n}}{\frac{2^n}{5^n} + \frac{4^n}{5^n}} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n} \to \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

αφού $\lim_n a^n = 0^+$, αν $0 < a < 1$.

3. Για την τρίτη ακολουθία έχουμε:

$$c_n = \frac{5^n}{2^n + 2 \cdot 5^n} = \frac{\frac{5^n}{5^n}}{\frac{2^n}{5^n} + \frac{2 \cdot 5^n}{5^n}} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 2} \to \frac{1}{2}.$$

□

Παράδειγμα 7.5. *Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών:*

1. $a_n = \frac{n^4 - 2n^3 + 5}{2n^2 - 1}$,
2. $b_n = \frac{4n^3 + 2n^2 + 1}{n^3 + 1}$,
3. $c_n = \frac{3n^2 - 1}{n^5 + 2}$.

Λύση:

1. Στις ρητές ακολουθίες εφαρμόζουμε την εξής μεθοδολογία: α) Στον αριθμητή βγάζουμε κοινό παράγοντα τον όρο που έχει τον μεγαλύτερο εκθέτη, β) στον παρονομαστή κάνουμε το ίδιο, γ) απλοποιούμε τους κοινούς παράγοντες και δ) εκμεταλλευόμαστε το ότι η ακολουθία $\frac{1}{n^k}$ είναι μηδενική.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^4 - 2n^3 + 5}{2n^2 - 1} = \frac{n^4\left(\frac{n^4}{n^4} - \frac{2n^3}{n^4} + \frac{5}{n^4}\right)}{n^2\left(\frac{2n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{n^4\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^4}\right)}{n^2\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)} \\ &= n^2 \frac{\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^4}\right)}{2 - \frac{1}{n^2}} \to (+\infty) \cdot \frac{1}{2} = (+\infty). \end{aligned}$$

2. Ομοίως θα έχουμε:

$$b_n = \frac{4n^3 + 2n^2 + 1}{n^3 + 1} = \frac{n^3\left(4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)} = \frac{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^3}} \to \frac{4}{1} = 4.$$

3. Τέλος για την ακολουθία c_n θα έχουμε:

$$c_n = \frac{3n^2 - 1}{n^5 + 2} = \frac{n^2\left(3 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^5\left(1 + \frac{2}{n^5}\right)} = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^5}} \to 0 \cdot \frac{3}{1} = 0.$$

□

Παράδειγμα 7.6. *Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών:*

1. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{2n+4}$,
2. $b_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n-2}$.

Λύση:

1. Υπάρχουν δύο διαφορετικές μεθοδολογίες για τέτοιου είδους ασκήσεις. Εδώ, σε κάθε ρίζα, θα βγάλουμε κοινό παράγοντα τον όρο με τον μεγαλύτερο εκθέτη. Οπότε θα έχουμε:

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{2n+4} = \sqrt{n\left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right)} - \sqrt{n\left(\frac{2n}{n} + \frac{4}{n}\right)} = \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}\sqrt{2+\frac{4}{n}}$$
$$= \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{2+\frac{4}{n}}\right) \to (+\infty)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right) = -\infty,$$

όπου πάλι χρησιμοποιήσαμε το ότι η ακολουθίες $\frac{1}{n^k}$ είναι μηδενικές.

2. Αν εφαρμόσουμε την ίδια μεθοδολογία σε αυτή την άσκηση θα καταλήξουμε σε απροσδιόριστη μορφή. Ας το δούμε:

$$a_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n-2} = \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{4}{n}} - \sqrt{n}\sqrt{1-\frac{2}{n}}$$
$$= \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}} - \sqrt{1-\frac{2}{n}}\right) \to (+\infty)\cdot(1-1) = (+\infty)\cdot 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση καταφεύγουμε στη μεθοδολογία πολλαπλασιασμού με τη συζυγή παράσταση (πολλοί αναφέρονται σε αυτή τη μεθοδολογία με τον όρο 'ρητοποίηση'). Σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$a_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n-2} = \frac{\left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n-2}\right)\left(\sqrt{n+4} + \sqrt{n-2}\right)}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n-2}}$$
$$= \frac{\sqrt{n+4}^2 - \sqrt{n-2}^2}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n-2}} = \frac{n+4-n+2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}} + \sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)}$$
$$= \frac{6}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}} + \sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)} \to 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

□

Παράδειγμα 7.7. *Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών:*

1. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$,

2. $b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}$.

Λύση:

1. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο παρεμβολής (Πρόταση 10). Παρατηρούμε ότι για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$ ισχύει ότι:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Επομένως, παρατηρώντας ότι ο n-οστός όρος της a_n είναι ένα άθροισμα n όρων, παίρνουμε ότι

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Έστω $c_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ και $c_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$. Για τη σύγκλιση των c_n, d_n παρατηρούμε ότι

$$c_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \to 1,$$

$$d_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{n}{n^2}\right)}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to 1,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τα όρια $\lim_n \frac{1}{n^k} = 0$, για $k = 0, 1$. Επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε $\lim_n a_n = 1$.

2. Και εδώ χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{1}{(2n)^2}$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$. Επομένως, θα έχουμε:

$$\frac{n+1}{n^2} \leq b_n \leq \frac{n+1}{(2n)^2}.$$

Με βάση το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\lim_n b_n = 0$.

□

Παράδειγμα 7.8. *Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών:*

1. $a_n = \frac{e^n}{n^n}$,
2. $b_n = \frac{n!}{e^n}$,
3. $c_n = \frac{n^{2018}}{n!}$,
4. $d_n = \frac{n^n}{n!}$.

Λύση: Σε ακολουθίες αυτού του είδους (δυνάμεις, παραγοντικά, κ.λ.π.) εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου (Πρόταση 13).

1. Παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^n}{n^n}} = \frac{n^n e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}e^n} == \frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{e}{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{e}{n+1}$$
$$= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\cdot\frac{e}{n+1} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{e}{n+1} \to \frac{1}{e}\cdot 0 = 0.$$

Στο παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το γνωστό όριο: $\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Επομένως από το κριτήριο του λόγου (Πρόταση 13) συμπεραίνουμε ότι $\lim_n a_n = 0$.

2. Εργαζόμαστε με παρόμοιο τρόπο:

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)!}{e^{n+1}}}{\frac{n!}{e^n}} = \frac{(n+1)!e^n}{e^{n+1}n!} = \frac{n+1}{e} \to +\infty.$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε απευθείας το κριτήριο παρεμβολής. Παρόλα αυτά, μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία $b'_n = \frac{1}{b_n}$, για την οποία θα έχουμε (προφανώς):

$$\left|\frac{b'_{n+1}}{b'_n}\right| = \cdots = \frac{e}{n+1} \to 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\lim_n b'_n = 0^+$, αφού η b'_n παίρνει μόνο θετικές τιμές. Άρα $\lim_n b_n = \lim_n \frac{1}{b'_n} = +\infty$.

3. Εργαζόμαστε όπως στο πρώτο ερώτημα:

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^{2018}}{(n+1)!}}{\frac{n^{2018}}{n!}} = \frac{(n+1)^{2018}n!}{(n+1)!n^{2018}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2018}\cdot\frac{1}{n+1}$$
$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2018}\cdot\frac{1}{n+1} \to 1\cdot 0 = 0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.

4. Εργαζόμαστε όπως στο ερώτημα 2. Ορίζουμε την ακολουθία $d'_n = \frac{n!}{n^n}$. Οπότε:

$$\left|\frac{d'_{n+1}}{d'_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$$
$$= \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} \to \frac{1}{e} < 1.$$

Επομένως συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία d'_n είναι μηδενική και μάλιστα ότι $\lim_n d'_n = 0^+$, αφού παίρνει μόνο θετικές τιμές. Άρα $\lim_n d_n = \lim_n \frac{1}{d'_n} = +\infty$.

□

Παράδειγμα 7.9. *Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών:*

1. $a_n = \sqrt[n]{2^n + e^n}$,
2. $b_n = \sqrt[n]{n^{2018} + 1}$,

Λύση: Σε ακολουθίες αυτού του είδους (ρίζες n-οστής τάξης) εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας (Πρόταση 12).

1. Ορίζουμε $c_n = 2^n + e^n$ και παρατηρούμε ότι

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{n+1} + e^{n+1}}{2^n + e^n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{e^n} + \frac{e^{n+1}}{e^n}}{\frac{2^n}{e^n} + \frac{e^n}{e^n}} = \frac{2\left(\frac{2}{e}\right)^n + e}{\left(\frac{2}{e}\right)^n + 1} \to e,$$

   όπου χρησιμοποιήσαμε το όριο της γεωμετρικής ακολουθίας $\lim_n a^n = 0$, αν $0 < a < 1$. Επομένως από το κριτήριο ρίζας (Πρόταση 12) συμπεραίνουμε ότι $\lim_n a_n = \lim_n \sqrt[n]{c_n} = e$.

2. Εργαζόμαστε με όμοιο τρόπο. Ορίζουμε την $d_n = n^{2018} + 1$ και έχουμε:

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{(n+1)^{2018} + 1}{n^{2018} + 1} = \frac{n^{2018}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2018}}{n^{2018}\left(1 + \frac{1}{n^{2018}}\right)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2018}}{1 + \frac{1}{n^{2018}}} \to 1,$$

   επομένως από το κριτήριο ρίζας συμπεραίνουμε ότι $\lim_n b_n = \lim_n \sqrt[n]{d_n} = 1$.

□

Παράδειγμα 7.10. *Να βρείτε τα όρια των ακολουθιών:*

1. $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n}$,
2. $b_n = \left(\frac{1+e^n}{n^2}\right)^n$.

Λύση:

1. Η ακολουθία a_n ορίζεται με τρόπο που μοιάζει στην ακολουθία που δίνει τον αριθμό e (Πρόταση 6). Παρατηρούμε ότι:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n\cdot\frac{3}{2}} = \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{3}{2}} \to e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3},$$

   όπου χρησιμοποιήσαμε το όριο $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. (Η ακολουθία $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$ είναι υπακολουθία της $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$).

2. Παρατηρούμε ότι $\lim_n \frac{e^n}{n^2} = +\infty$ (η απόδειξη γίνεται εύκολα με το κριτήριο του λόγου). Επομένως

$$b_n = \left(\frac{1 + e^n}{n^2}\right)^n = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{e^n}{n^2}\right)^n \to (+\infty)^{+\infty} = +\infty.$$

□

Παράδειγμα 7.11. *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:*

1. $a_n = n + (-1)^n n$,
2. $b_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$,
3. $c_n = (-1)^n \frac{n!}{e^n}$.

Λύση: Οι συγκεκριμένες ακολουθίες δε συγκλίνουν. Ο ευκολότερος τρόπος να αποδείξουμε κάτι τέτοιο είναι να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο των υπακολουθιών (Πρόταση 7), αναζητώντας (για παράδειγμα) δύο υπακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικό σημείο.

1. Παίρνουμε τις υπακολουθίες $a_{2n} = 2n+2n = 4n \to +\infty$ και $a_{2n+1} = 2n+1-(2n+1) = 0 \to 0$. Επομένως η a_n αποκλίνει.
2. Παίρνουμε τις υπακολουθίες $b_{6n} = \cos\left(\frac{6n\pi}{3}\right) = \cos(n \cdot 2\pi) = 1$ και $b_{6n+3} = \cos\left(\frac{6n\pi+3\pi}{3}\right) = \cos(n \cdot 2\pi + \pi) = -1$. Επομένως η b_n αποκλίνει.
3. Παίρνουμε τις υπακολουθίες $c'_n = c_{2n} = \frac{(2n)!}{e^{2n}}$ και $c''_n = c_{2n+1} = -\frac{(2n+1)!}{e^{2n+1}}$. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο Λόγου μπορούμε να δείξουμε ότι $\lim_n c'_n = +\infty$ και $\lim_n c''_n = -\infty$. Επομένως η ακολουθία δε συγκλίνει ούτε σε αριθμό ούτε στο άπειρο.

□

Παράδειγμα 7.12. *Έστω $0 < a < 1$, $c > 0$ σταθερά και ν ακολουθία a_n για την οποία ισχύει $|a_{n+1} - a_n| \leq ca^n$. Δείξτε ότι η ακολουθία a_n συγκλίνει.*

Λύση: Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία είναι βασική, άρα (σύμφωνα με την πρόταση 21) θα συγκλίνει. Ας υποθέσουμε ότι $\varepsilon > 0$, τότε:

$$
\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_{m+1} - a_m| \\
&\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + |a_{m+1} - a_m| \\
&\leq ca^{n-1} + ca^{n-2} + \cdots + ca^m = c(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^m) \\
&= ca^m \frac{a^{n-m} - 1}{a - 1} = ca^m \frac{1 - a^{n-m}}{1 - a} \leq ca^m \frac{1}{1-a} = \frac{ca^m}{1-a}.
\end{aligned}
$$

Επομένως, αρκεί να βρούμε n_0 τέτοιο ώστε να ισχύει $\frac{ca^m}{1-a} < \varepsilon$ για κάθε $m > n_0$. Άρα,

$$
\frac{ca^m}{1-a} < \varepsilon \Leftrightarrow a^m < \frac{\varepsilon(1-a)}{c} \Leftrightarrow m > \log_a\left(\frac{\varepsilon(1-a)}{c}\right).
$$

Αρκεί λοιπόν να επιλέξουμε $n_0 = \left[\log_a\left(\frac{\varepsilon(1-a)}{c}\right)\right] + 1$. Ανακεφαλαιώνοντας, αποδείξαμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = \left[\log_a\left(\frac{\varepsilon(1-a)}{c}\right)\right] + 1$, τέτοιο ώστε $|a_n - a_m| < \varepsilon$, για κάθε $n, m > n_0$. Άρα η ακολουθία είναι βασική. □