# Καμπυλες

Γενικά, με τον όρο καμπύλη αναφερόμαστε σε γραμμές (όχι απαραίτητα ευθείες) που ενώνουν σημεία στο χώρο με συνεχή τρόπο. Αυτό σημαίνει ότι μια καμπύλη μπορεί να σχεδιαστεί με ένα μολύβι, χωρίς να χρειαστεί να 'σηκώσουμε' το μολύβι από το χαρτί. Τα παραπάνω αποτελούν μια γενική περιγραφή και δεν μπορούν να αποτελέσουν έναν αυστηρό μαθηματικό ορισμό. Είναι δυνατόν να έχουμε διαφορετικούς τρόπους μαθηματικής περιγραφής μιας καμπύλης. Για παράδειγμα, στο επίπεδο (δηλαδή στον $\mathbb{R}^2$), μια καμπύλη μπορεί να περιγραφεί με τους παρακάτω τρόπους:

1. Αναλυτική Εξίσωση: Μια καμπύλη μπορεί να οριστεί μέσω μιας πεπλεγμένης συνάρτησης ως το σύνολο των σημείων: $\Gamma = \{(x, y) : f(x, y) = 0\}$.

2. Καρτεσιανή Εξίσωση: Όταν μπορούμε να 'λύσουμε' την πεπλεγμένη εξίσωση ως προς μια μεταβλητή: $\Gamma = \{(x, y) : y = f(x), x \in I\}$.

3. Παραμετρική Εξίσωση: Μια καμπύλη μπορεί να οριστεί μέσω μιας παραμετροποίησης: $\Gamma = \{\vec{c}(t) = (x(t), y(t)) : t \in I\}$.

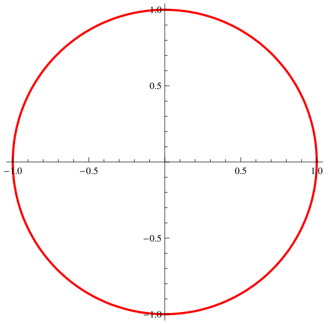
Σε αυτό το σημείο θα πρέπει επίσης να σημειώσουμε ότι πολλές φορές η εξίσωση μιας καμπύλης μπορεί να δίνεται σε πολικές, σφαιρικές ή κυλινδρικές συντεταγμένες. Παρακάτω δίνουμε έναν από τους πιο συνήθης ορισμούς για την έννοια της καμπύλης, αυτόν της παραμετρικοποιημένης καμπύλης.

**Ορισμός 1.**

Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\vec{c} : I \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, με $I$ διάστημα του $\mathbb{R}$. Το σύνολο των σημείων $\Gamma = \{\vec{c}(t) = (c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t));$ με $t \in I\}$ το ονομάζουμε παραμετρικοποιημένη καμπύλη. Η διανυσμάτικη συνάρτηση $\vec{c}$ ονομάζεται παραμέτριση της καμπύλης.

Παρακάτω δίνουμε μερικά παραδείγματα γνωστών καμπυλών με διάφορους τρόπους περιγραφής. Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραμέτρηση μια καμπύλης δεν είναι μοναδική.

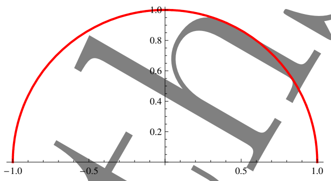
**Παράδειγμα 1.1:** Κύκλος ακτίνας $a$.



1. Αναλυτική περιγραφή: $\Gamma = \{(x,y):\ x^2+y^2=a^2\}$.
2. Καρτεσιανή περιγραφή: Δεν μπορεί να υπάρξει, αφού η αναλυτική εξίσωση δεν είναι επιλύσημη ως προς $x$ ή ως προς $y$.
3. Παραμετρική περιγραφή: $\Gamma = \{(x,y) : x = a\cos(t),\ y = a\sin(t), t \in [0,2\pi)\}$.

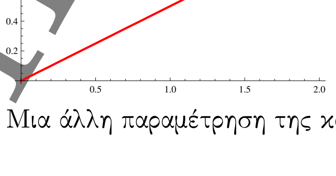
Η παραμετρική περιγραφή προκύπτει από έναν απλό μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες της αναλυτικής περιγραφής. Σε αυτη την περίπτωση θέτουμε $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ και μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι $r = a$. Μια άλλη παραμετρική περιγραφή της καμπύλης είναι η $\Gamma = \{(x,y) : x = a\cos(100t),\ y = a\sin(100t),\ t \in [0, 2\pi/100)\}$. Το σχήμα δείχνει έναν κύκλο ακτίνας $a = 1$.

**Παράδειγμα 1.2:** Ημικύκλιο ακτίνας $a$.



1. Αναλυτική περιγραφή: $\Gamma = \{(x,y):\ x^2+y^2=a^2, y \geq 0\}$.
2. Καρτεσιανή περιγραφή: $\Gamma = \{(x,y):\ y = \sqrt{a^2-x^2}\}$.
3. Παραμετρική περιγραφή: $\Gamma = \{(x,y) : x = a\cos(t),\ y = a\sin(t),\ t \in [0,\pi]\}$.

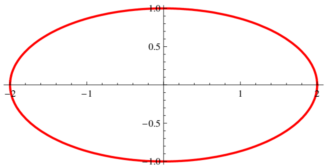
**Παράδειγμα 1.3:** Ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(0,1)$ και $(2,1)$.



1. Αναλυτική περιγραφή: $\Gamma = \{(x,y) :\ 2y - x = 0, x \in [0,2],\ y \in [0,1]\}$.
2. Καρτεσιανή περιγραφή: $\Gamma = \{(x,y):\ y = \frac{1}{2}x, x \in [0,2]\}$.
3. Παραμετρική περιγραφή: $\Gamma = \{(2t,t), t \in [0,1]\}$.

Μια άλλη παραμέτρηση της καμπύλης είναι η $\Gamma = \{(2e^t - 2, e^t - 1), t \in [0, \ln 2]\}$.

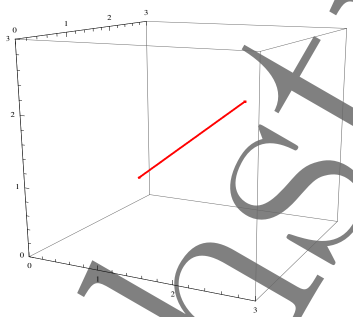
**Παράδειγμα 1.4:** Έλλειψη.




1. Αναλυτική περιγραφή: $\Gamma = \{(x,y):\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$.
2. Καρτεσιανή περιγραφή: Δεν μπορεί να υπάρξει, αφού η αναλυτική εξίσωση δεν είναι επιλύσημη ως προς $x$ ή ως προς $y$.
3. Παραμετρική περιγραφή: $\Gamma = \{(x,y):\ \ x = a\cos(t),\ \ y = b\sin(t), t \in [0, 2\pi)\}$.

Η παραμετρική περιγραφή προκύπτει αν εφαρμόσουμε δύο απλούς μετασχηματισμούς στην αναλυτική περιγραφή. Αρχικά εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $u = x/a$ και $v = y/b$, οπότε προκύπτει η εξίσωση $u^2 + v^2 = 1$. Στη συνέχεια εκτελούμε έναν μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες. Σε αυτη την περίπτωση θέτουμε $u = r\cos(\theta)$, $v = r\sin(\theta)$ και μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι $r = 1$. Επομένως, $x = au = a\cos(\theta)$ και $y = bu = b\sin(\theta)$. Το σχήμα δείχνει μια έλλειψη με μεγάλο άξονα $a = 2$ και $b = 1$.

**Παράδειγμα 1.5:** Ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία του $\mathbb{R}^3$.

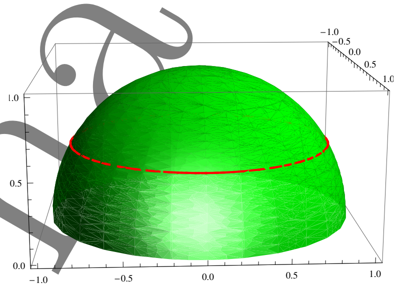



Η παραμετρική εξίσωση του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία $A = (x_1, y_1, z_1)$ και $B = (x_2, y_2, z_2)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{c}(t) = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB},$$

για $t \in [0, 1]$. Το παραπάνω λέγεται κυρτός συνδυασμός των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.

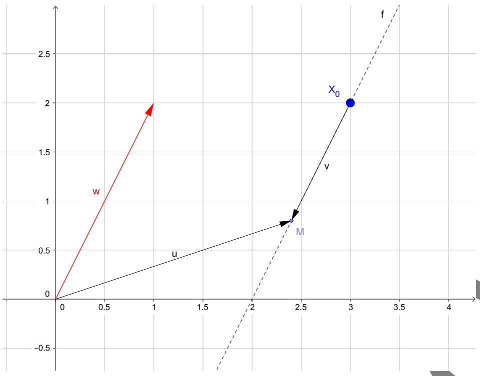
**Παράδειγμα 1.6:** Κύκλος πάνω σε σφαίρα.




Η αναλυτική περιγραφή της καμπύλης είναι: $\Gamma = \{(x,y,z):\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z = \frac{1}{2}\}$. Πρόκειται για μια κυκλική διατομή της μοναδιαίας σφαίρας στο επίπεδο $z = 1/2$. Η παραμετρική εξίσωση δίνεται από $\Gamma = \left\{\left(\frac{3}{2}\cos(t), \frac{3}{2}\sin(t), \frac{1}{2}\right), t \in [0, 2\pi)\right\}$.

Η παραμετρική περιγραφή προκύπτει μέσω ενός απλού μετασχηματισμού κυλινδρικών συντεταγμένων. Θέτουμε $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, οπότε η αναλυτική εξίσωση δίνει $r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + \frac{1}{4} = 1$ και τελικά παίρνουμε $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

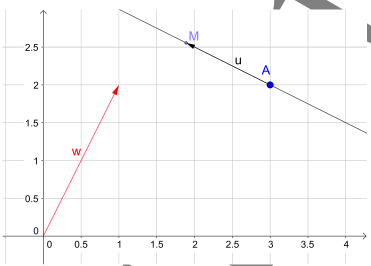
**Παράδειγμα 1.7:** Ευθεία η οποία διέρχεται από σημείο $X_0$ και είναι παράλληλη σε διάνυσμα




Έστω $M$ ένα σημείο της ζητούμενης ευθείας (όπως στο σχήμα). Τότε θα πρέπει τα διανύσματα $\overrightarrow{X_0M}$ και $\vec{w}$ να είναι παράλληλα, δηλαδή θα υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{X_0M} = t\vec{w}$. Επομένως, θα έχουμε ότι $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OX_0} = t\vec{w}$. Άρα, η παραμετρική εξίσωση της ευθείας δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{c}(t) = \overrightarrow{OX}_0 + t\vec{w}, \text{ για } t \in \mathbb{R}.$$

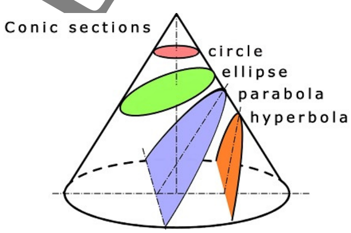
**Παράδειγμα 1.8:** Ευθεία η οποία διέρχεται από σημείο $A = (x_0, y_0)$ και είναι κάθετη σε διάνυσμα $\vec{w} = (w_1, w_2)$.




Έστω $M$ ένα σημείο της ζητούμενης ευθείας (όπως στο σχήμα). Τότε θα πρέπει τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ και $\vec{w}$ να είναι κάθετα, δηλαδή θα ισχύει $\overrightarrow{AM}\vec{w} = 0$. Επομένως, θα έχουμε ότι $(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA})\vec{w} = 0$, από όπου προκύπτει η σχέση $\overrightarrow{OM}\vec{w} = \overrightarrow{OA}\vec{w}$. Από την τελευταία σχέση μπορεί εύκολα να προκύψει η παραμετρική εξίσωση της ευθείας. Αν, για παράδειγμα, έχουμε ότι $w_2 \neq 0$ τότε η παραμετρική εξίσωση θα είναι

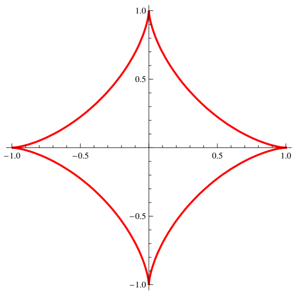
$$\vec{c}(t) = \left(t, \frac{w_1x_0 + w_2y_0 - w_1t}{w_2}\right), \text{ για } t \in \mathbb{R}.$$

**Παράδειγμα 1.9:** Κωνική Τομή της μορφής $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$.




Ανάλογα με τις τιμές που παίρνουν οι παράμετροι $A, B, C, D, E, F$ η αναλυτική εξίσωση $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ μπορεί να αναπαριστά κύκλο, έλλειψη, παραβολή, υπερβολή (ή ευθεία αν $A = B = 0$). Υπάρχει επίσης η περίπτωση κανένα σημείο να μην επαληθεύει την εξίσωση.

**Παράδειγμα 1.10:** Άλλα παραδείγματα καμπυλών.

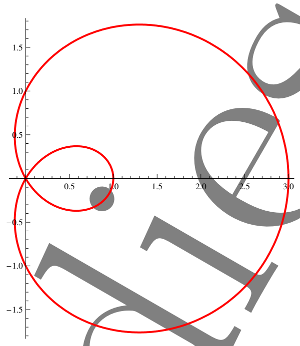


Αστροειδής

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}$

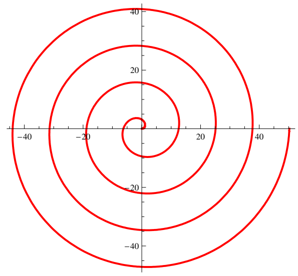
$t \in [0, 2\pi)$



Κοχλιοειδής

$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} (1 + 2\cos(t))\cos(t) \\ (1 + 2\cos(t))\sin(t) \end{pmatrix}$

$t \in [0, 2\pi)$



Σπείρα

$r = \theta$ (πολικές συντεταγμένες)

$\vec{c}(t) = (t, t)$ (πολικές συντεταγμένες)

$t \in [0, 8\pi]$

**Παράδειγμα 1.11:** Καμπύλη Peano.

Υπάρχουν και πιο εξωτικές περιπτώσεις καμπυλών, όπως για παράδειγμα οι καμπύλες που γεμίζουν τον χώρο. Αυτές είναι καμπύλες με άπειρο μήκος που περνάνε από όλα τα σημεία ενός κλειστού και φραγμένου συνόλου. Κλασσικό παράδειγμα τέτοιας καμπύλης είναι η καμπύλη Peano, η οποία προκύπτει ως το όριο μιας επαναληπτικής διαδικασίας. Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε τα 5 πρώτα βήματα της συγκεκριμένης επαναληπτικής διαδικασίας.