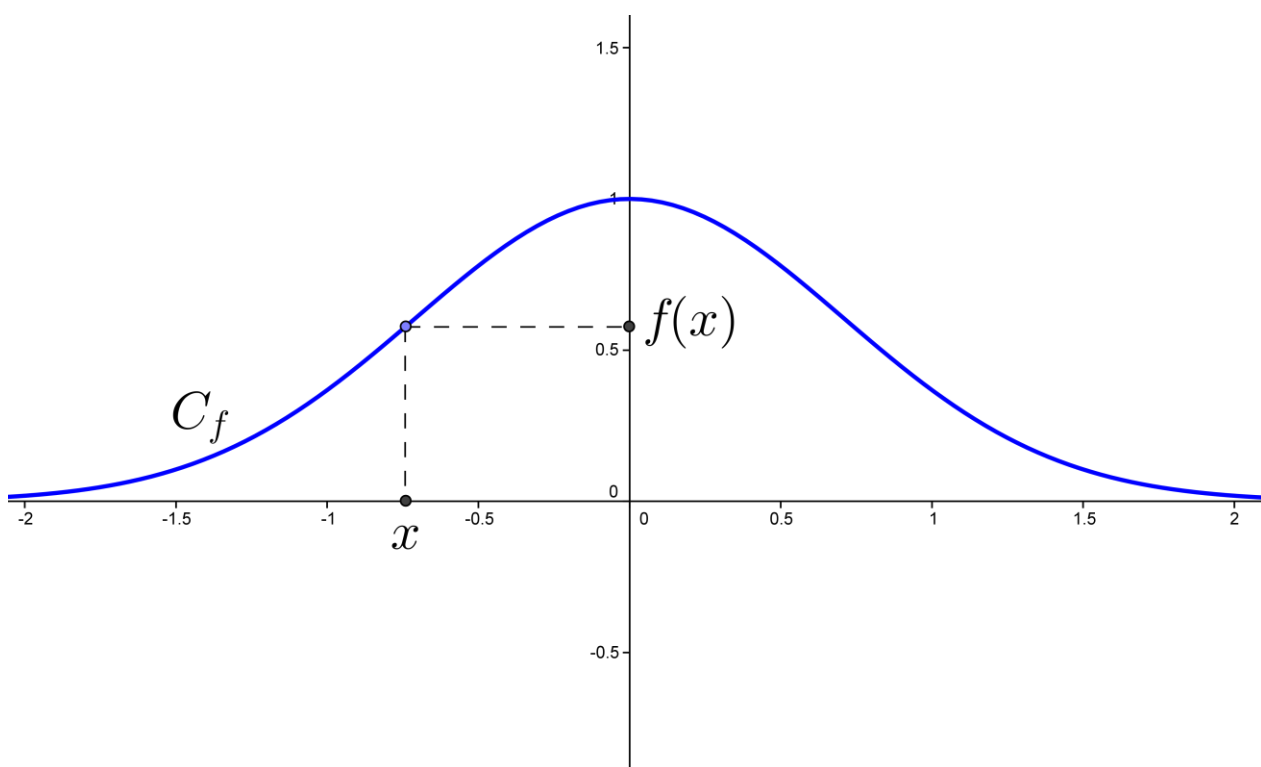


Συναρτήσεις



ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Α. Βασικές Έννοιες

Ορισμός: Έστω A ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$, αντιστοιχίζεται σε ένα και μόνο ένα πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Συνήθως γράφουμε $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και στη συνέχεια δίνουμε τον τύπο της συνάρτησης, π.χ. $f(x) = \ln(x)$.

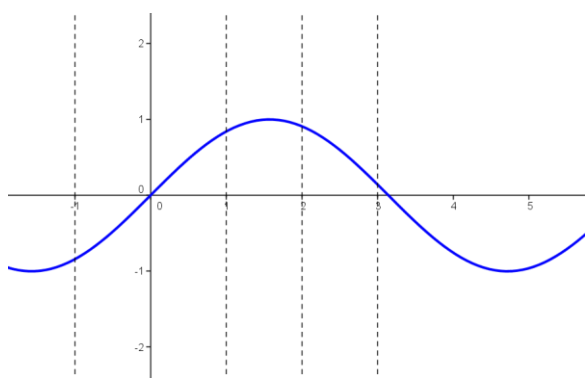
Πεδίο Ορισμού μιας συνάρτησης: Είναι το σύνολο A , δηλαδή το σύνολο των αριθμών που απεικονίζει η συνάρτηση.

Σύνολο Τιμών μιας συνάρτησης: Είναι το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$ και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή:

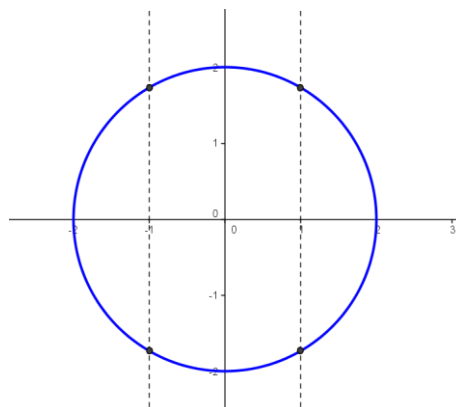
$$f(A) = \{y \mid y = f(x), \text{ για κάποιο } x \in A\}$$

Γραφική Παράσταση μιας συνάρτησης: Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f . Η εξίσωση $y=f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f . Επομένως, η $y=f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f .

Προσοχή: Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο (σχήμα 1).



(α)



(β)

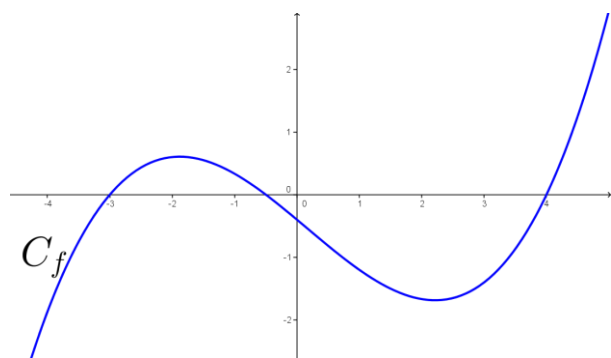
Σχήμα 1. Η καμπύλη του (α) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu(x)$. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει ένα κοινό σημείο με την καμπύλη. Αντίθετα, ο κύκλος του σχήματος (β) δεν μπορεί να θεωρηθεί ως η γραφική συνάρτηση κάποιας συνάρτησης.

Κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $-f$.

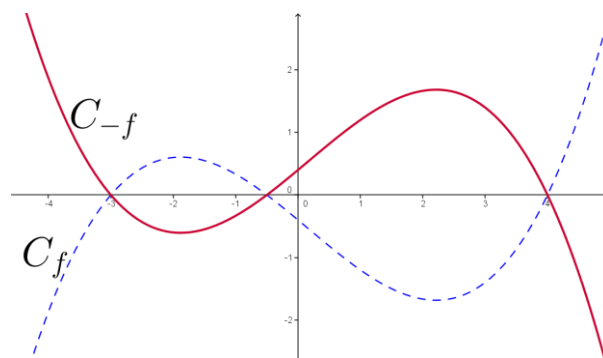
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f , γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. (σχήμα 2).

Κατασκευή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $|f|$.

Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν (σχήμα 3).

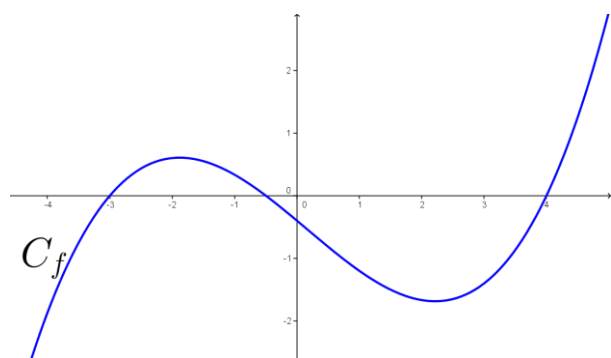


(α)

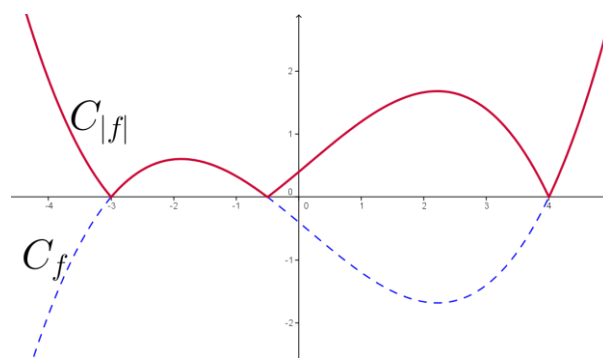


(β)

Σχήμα 2. Η καμπύλη του (α) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Στο (β) φαίνεται η γραφική παράσταση της f και της $-f$.



(α)

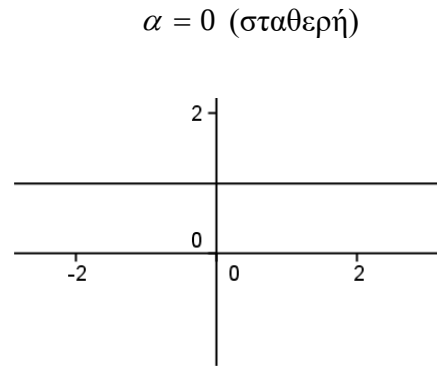
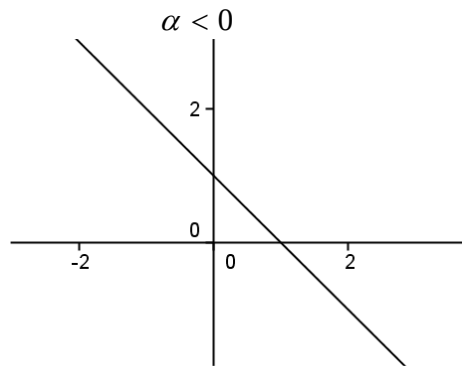
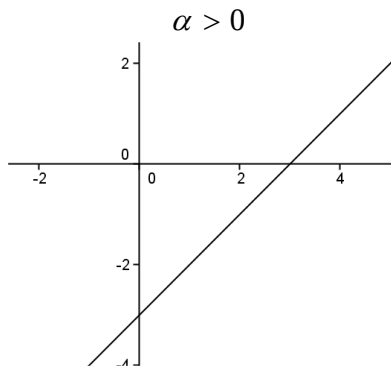


(β)

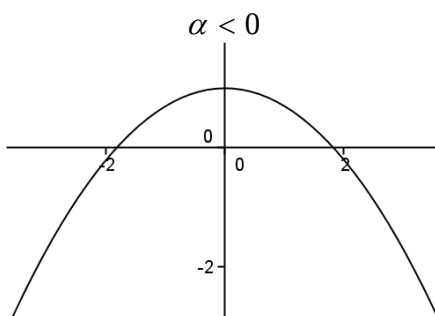
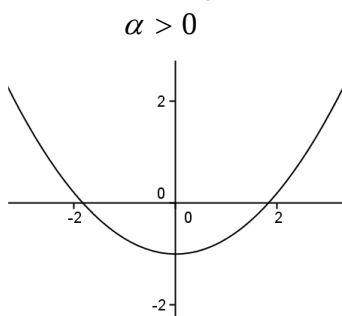
Σχήμα 3. Η καμπύλη του (α) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Στο (β) φαίνεται η γραφική παράσταση της f και της $|f|$.

B. ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

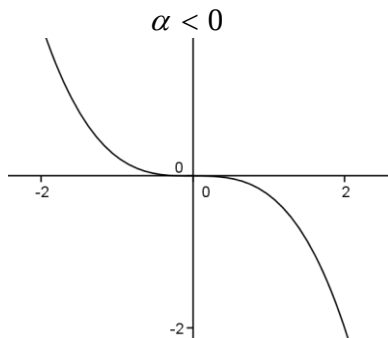
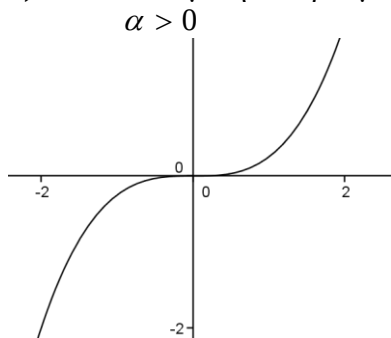
1) Γραμμική $f(x) = \alpha x + \beta$



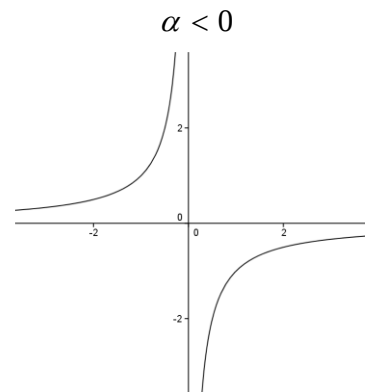
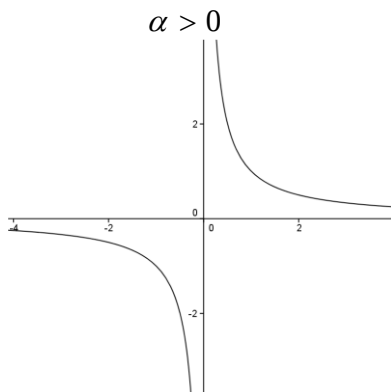
2) Παραβολή $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$



3) Η πολωνυμική 3ου βαθμού



4) Υπερβολή $f(x) = \frac{a}{x}$

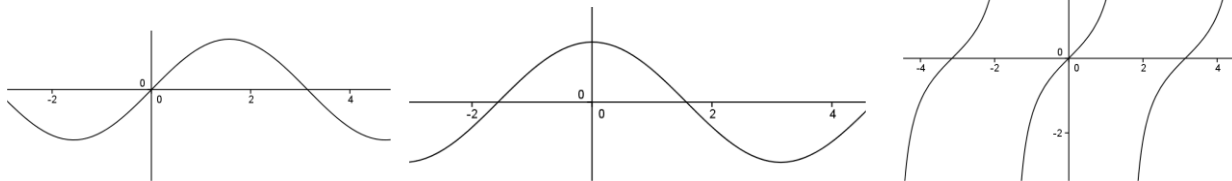


5) Ημίτονο – Συνημίτονο – Εφαπτομένη

$$f(x) = \eta\mu(x)$$

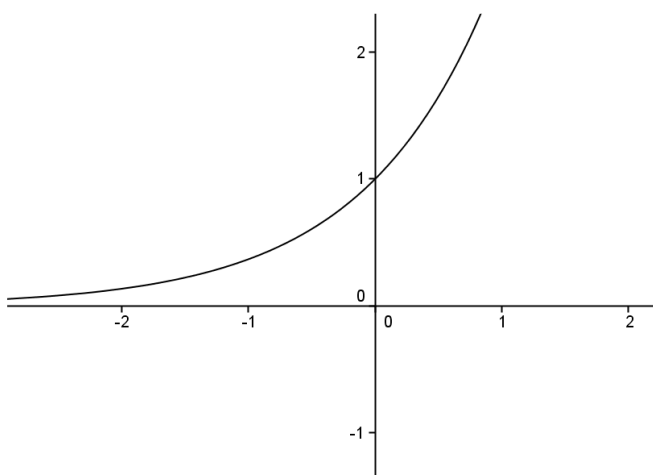
$$f(x) = \sigma\upsilon\nu(x)$$

$$f(x) = \varepsilon\phi(x)$$

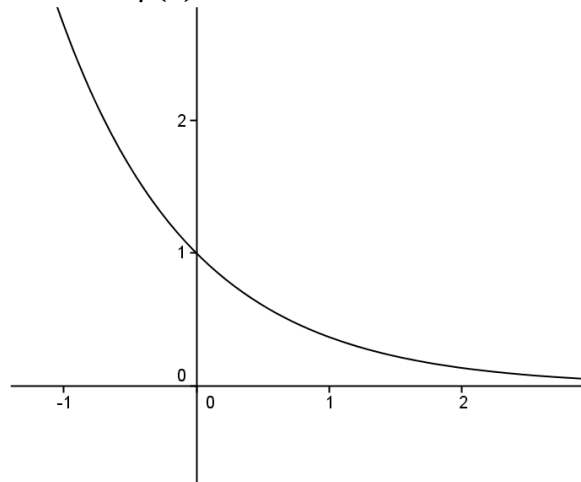


6) Εκθετική Συνάρτηση

$$f(x) = e^x$$

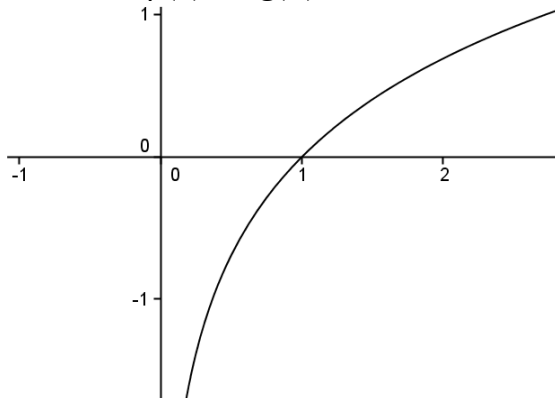


$$f(x) = e^{-x}$$

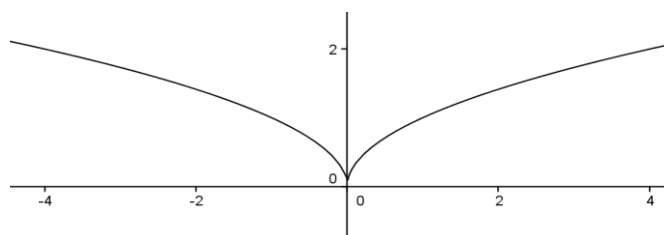
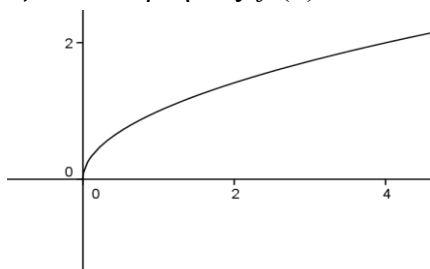


7) Λογαριθμική Συνάρτηση

$$f(x) = \log(x)$$



8) Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \sqrt{|x|}$.



Γ. Ισότητα - Πράξεις

Ισότητα Συναρτήσεων. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Αν η σχέση $f(x) = g(x)$ ισχύει για κάθε $x \in \Gamma \subset A$, τότε θα λέμε ότι οι f και g είναι ίσες στο Γ .

Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα.

- Άθροισμα: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
- Διαφορά: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$,
- Γινόμενο: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$,
- Πηλίκο: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ είναι το $A \cap B$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης πηλίκο f/g είναι το $A \cap B$ εξαιρουμένων των x που μηδενίζουν τον παρονομαστή (δηλαδή την g).

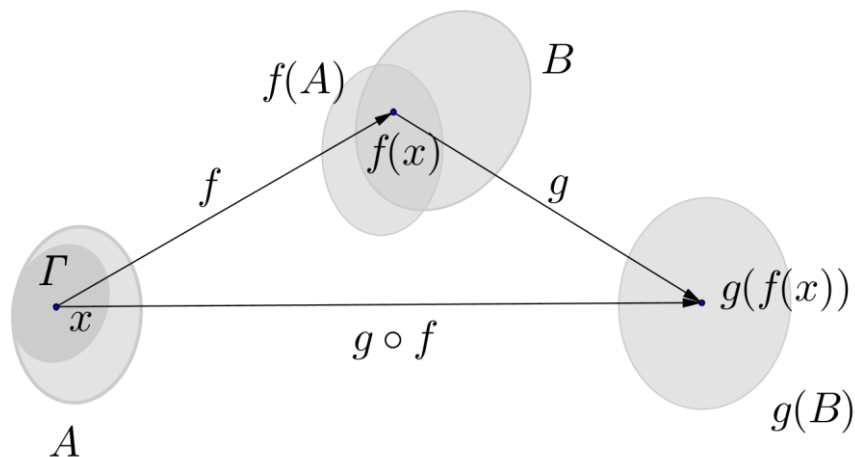
Σύνθεση Συναρτήσεων.

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντίστοιχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g** , και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g (σχήμα 4). Δηλαδή είναι το σύνολο

$$\Gamma = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$



Σχήμα 4. Σύνθεση συναρτήσεων.

Ασκήσεις

1. Δίνεται συνάρτηση $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:
$$f(\alpha) + f(\beta) = f\left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}\right) \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in (-1, 1).$$
2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x^2$. Να αποδείξετε ότι ισχύει:
$$f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) = 2.$$
3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$.
4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.
5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \log(x^2 - 3x)$.
6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$.
7. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπο: $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g, f-g, f \cdot g, \frac{f}{g}$.
8. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπο: $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ και $g(x) = x + 3$, να εξετάσετε αν είναι ίσες.
9. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπο: $f(x) = \frac{2\mu^2 x + \mu}{x + 1 - \mu}$ και $g(x) = \frac{(3\mu - 1)x + \mu}{x + \mu}$. Να προσδιορίσετε τις πραγματικές τιμές του μ ώστε $f = g$.
10. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπο όπως πιο κάτω. Να βρείτε τα σύνολα, στα οποία ισχύει η ισότητα $f = g$.
 - i) $f(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x^3 - 1}$ και $g(x) = \frac{2x}{x^2 + x + 1}$.
 - ii) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$ και $g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$.
 - iii) $f(x) = \log(-x^2 - 6x + 7)^4$ και $g(x) = 4\log(7 - 6x - x^2)$.
 - iv) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x(x-1)}$.

ΜΕΡΟΣ 2

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ

Α. Βασικές Έννοιες

Γνησίως Αύξουσα: Μια συνάρτηση καλείται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

Αύξουσα: Μια συνάρτηση καλείται αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$.

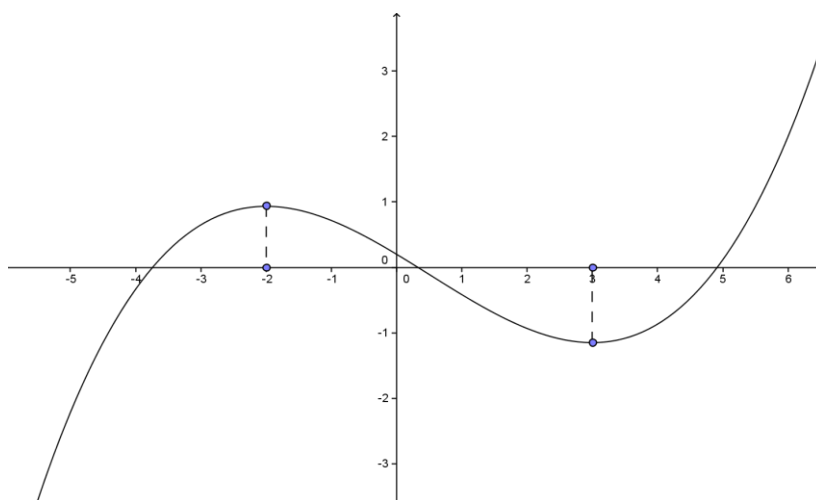
Γνησίως Φθίνουσα: Μια συνάρτηση καλείται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Φθίνουσα: Μια συνάρτηση καλείται φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$.

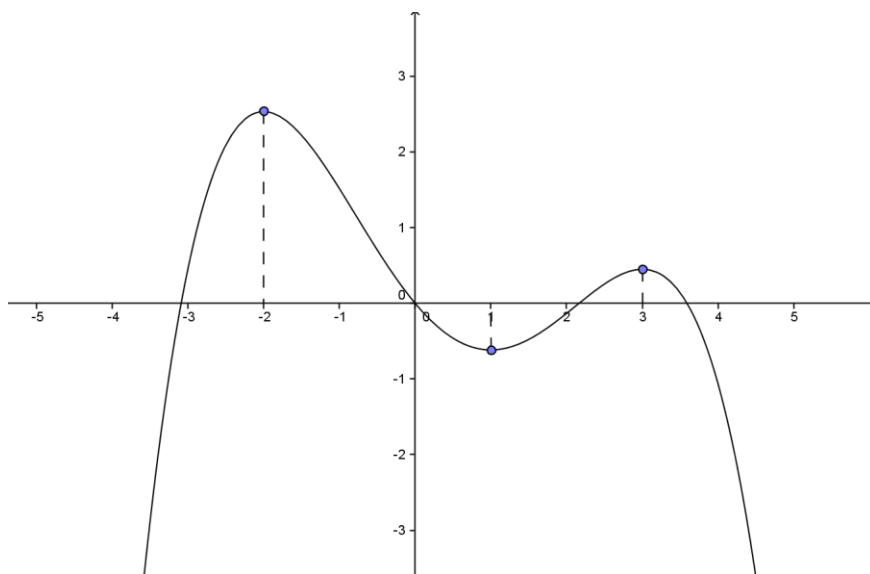
Γνησίως Μονότονη: Μια συνάρτηση καλείται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Ολικό Μέγιστο: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Ολικό Ελάχιστο: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό ελάχιστο, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.



Σχήμα 5. Η συνάρτηση του σχήματος είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -2]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$. Η συνάρτηση δεν έχει ούτε ολικό μέγιστο ούτε ολικό ελάχιστο. Παρουσιάζει, όμως, τοπικό μέγιστο στο σημείο $x = -2$ και τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = 3$.



Σχήμα 6. Η συνάρτηση του σχήματος είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -2]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 1]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$. Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $x = -2$, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = 1$ και τοπικό μέγιστο για $x = 3$.

Το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο καλούνται ολικά ακρότατα της συνάρτησης.

Συνάρτηση 1-1: Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, καλείται συνάρτηση 1-1, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, ή ισοδύναμα ισχύει η συνεπαγωγή $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

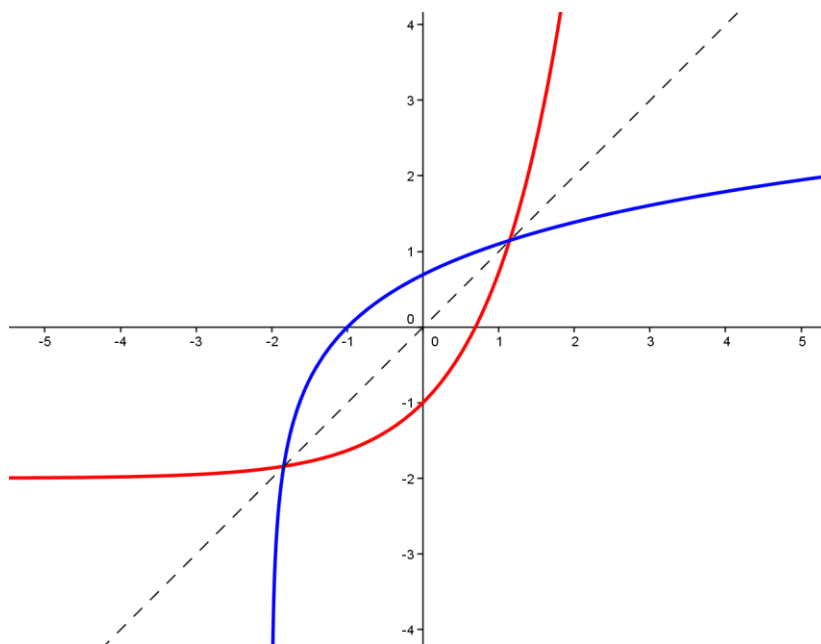
Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι:

- Μια συνάρτηση είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .
- Μια συνάρτηση είναι 1-1, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης το πολύ σε ένα σημείο.
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι και 1-1. Υπάρχουν όμως συναρτήσεις 1-1 που δεν είναι γνήσια μονότονες.

Αντίστροφη Συνάρτηση: Δίνεται η συνάρτηση 1-1, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Ορίζουμε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ως εξής. $f^{-1} : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$: $f^{-1}(y) = x$, για κάθε $y \in f(A)$, με $y = f(x)$, για κάποιο $x \in A$.

Προσοχή:

- Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f .
- Η f^{-1} έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f .
- Ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.
- Για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(f^{-1}(f(x))) = f^{-1}(f(x)) = x$.
- Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ (τη διχοτόμο του $1^{\text{ου}}$ και του $3^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου).



Σχήμα 7. Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Άρτια Συνάρτηση: Μια συνάρτηση f θα λέγεται άρτια αν και μόνο αν:

A) Το πεδίο ορισμού της D_f είναι συμμετρικό ως προς το 0 και

B) Για κάθε $x \in D_f$ ισχύει $f(-x) = f(x)$.

Περιττή Συνάρτηση: Μια συνάρτηση f θα λέγεται περιττή αν και μόνο αν:

A) Το πεδίο ορισμού της D_f είναι συμμετρικό ως προς το 0 και

B) Για κάθε $x \in D_f$ ισχύει $f(-x) = -f(x)$.

Ασκήσεις

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.
A) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 1$ B) $f(x) = \eta\mu(x^2)$
Γ) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ Δ) $f(x) = 2x^3 - x$
2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1+2x}{1-2x}$ είναι περιττή.
3. Να εξεταστεί αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι 1-1.
A) $f(x) = 2x^3 + 5$ B) $f(x) = x^2 - 2$ Γ) $f(x) = \ln \frac{1}{x-1}$ Δ) $f(x) = e^x - 2$
4. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \in (-\infty, 3] \\ x^2-4 & x \in (3, +\infty) \end{cases}$ δεν είναι 1-1.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Εξετάστε αν είναι 1-1. Αν απαντήσετε καταφατικά βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - \ln(x-1)$. Αποδείξτε ότι αντιστρέφεται και υπολογίστε την αντίστροφή της.
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$. Αποδείξτε ότι αντιστρέφεται και υπολογίστε την αντίστροφή της.