ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΜΕΡΟΣ Γ
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

I. Επίλυση Εξισώσεων 2ου Βαθμού

Οι εξισώσεις 2ου βαθμού επιλύονται με τη μέθοδο της Διακρίνουσας. Η μεθοδολογία επίλυσης αποτελείται από τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1: Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$.

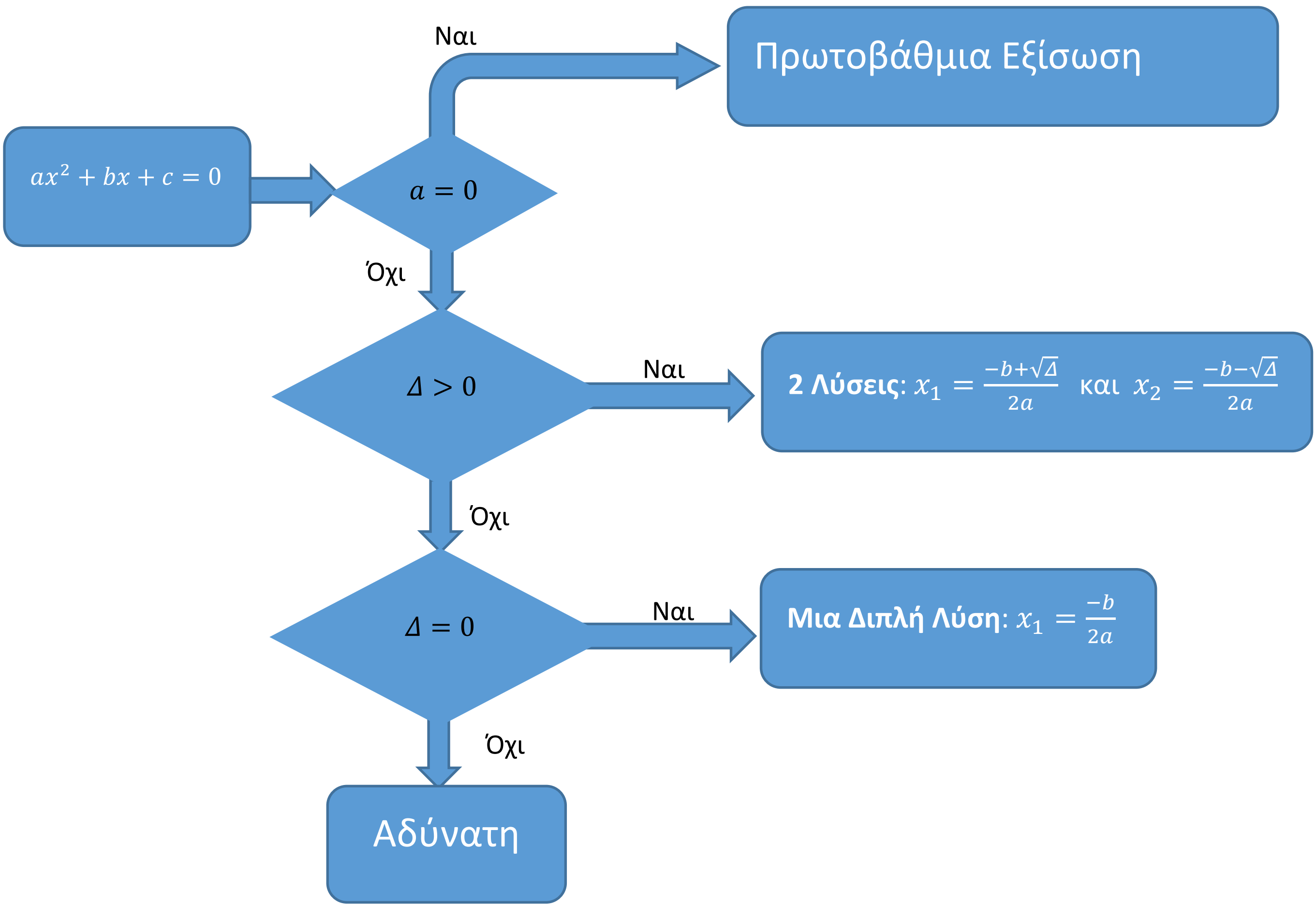
Βήμα 2: Υπολογίσουμε την τιμή της Διακρίνουσας $\boldsymbol{\Delta=b^2-4ac}$.

Βήμα 3: Ανάλογα με την τιμή της Διακρίνουσας βρίσκουμε τη λύση. Συγκεκριμένα:

- Αν $\Delta>0$, τότε η εξίσωση έχει δύο διακριτές λύσεις: $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ και $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Αν $\Delta=0$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή λύση: $x_1=\frac{-b}{2a}$.
- Αν $\Delta<0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν ο συντελεστής $\boldsymbol{a}$ του όρου x^2 είναι 0, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το τελευταίο βήμα. Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση είναι πρώτου βαθμού, οπότε ακολουθούμε την αντίστοιχη μεθοδολογία.

Ο γενικός αλγόριθμος επίλυσης μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης μπορεί να αναπαρασταθεί με το παρακάτω διάγραμμα ροής.



Τύποι Vieta

Στην περίπτωση που η Διακρίνουσα είναι θετική, οπότε έχουμε δύο διαφορετικές ρίζες, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ειδικότερα σε μονήρη τριώνυμα, δηλαδή στην περίπτωση όπου $a = 1$, το άθροισμα των ριζών είναι ίσο με $-b$, ενώ το γινόμενο είναι ίσο με c. Επομένως, η δευτεροβάθμια εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή $x^2 - Sx + P = 0$.

Παραγοντοποίηση Τριωνύμου

Στην περίπτωση που το τριώνυμο $ax^2 + bx + c$ έχει ρίζες μπορούμε να το παραγοντοποιήσουμε. Πιο συγκεκριμένα:

- Αν $\Delta > 0$, τότε $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Αν $\Delta = 0$, τότε $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.
- Αν $\Delta < 0$, τότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.

Παράδειγμα 1: Να λυθεί η εξίσωση $3x^2 + x = 0$.

Το παραπάνω είναι ένα ελλειπές τριώνυμο αφού δεν έχει σταθερό όρο. Συγκεκριμένα $a = 3,\ b = 1,$ $c = 0$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μεθοδολογία της διακρίνουσας, αλλά μπορούμε να το λύσουμε γρηγορόρτερα με παραγοντοποίηση.

$3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 1) = 0.$

Επομένως, είτε $x = 0$, είτε $x = -\frac{1}{3}$.

Παράδειγμα 2: Να λυθεί η εξίσωση $2x^2 - 8 = 0$.

Έχουμε και πάλι ελλειπές τριώνυμο, αφού $a = 2,\ b = 0,\ c = 8$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μεθοδολογία της διακρίνουσας, αλλά μπορούμε να το λύσουμε γρηγορόρτερα όπως δείχνουμε παρακάτω:

$$2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2.$$

Παράδειγμα 3: Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Ακολουθούμε τη μεθοδολογία βήμα προς βήμα:

Βήμα 1: Παρατηρούμε ότι $a = 1,\ b = -5,\ c = 6$

Βήμα 2: Υπολογίζουμε την διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 6 = 1$

Βήμα 3: Αφού $\Delta > 0$, θα έχουμε δύο ρίζες: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{2} = 3$ και $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{2} = 2.$

Παρατήρηση: Μπορούμε εύκολα να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

Παράδειγμα 4: Να λυθεί η εξίσωση $9x^2 + 30x + 25 = 0$.

Βήμα 1: Παρατηρούμε ότι $a = 9,\ b = 30,\ c = 25$

Βήμα 2: Υπολογίζουμε την διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4ac = 900 - 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900 - 900 = 0$.

Βήμα 3: Αφού $\Delta = 0$, θα έχουμε μια διπλή ρίζα: $x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{18} = -\frac{5}{3}$.

Παρατήρηση: Μπορούμε εύκολα να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο: $9x^2 + 30x + 25 = 9\left(x + \frac{5}{3}\right)^2$.

Παράδειγμα 5: Να λυθεί η εξίσωση $(3x-1)(2x+1) = 6$.

Βήμα 1: Φέρνουμε την εξίσωση στην κανονική της μορφή, δηλαδή:

$(3x-1)(2x+1) = 6 \Leftrightarrow 6x^2 + 3x - 2x - 1 = 6 \Leftrightarrow 6x^2 + x - 7 = 0$.

Παρατηρούμε ότι $a = 6,\ b = 1,\ c = -7$.

Βήμα 2: Υπολογίζουμε την διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot (-7) \cdot 6 = 1 + 168 = 169$.

Βήμα 3: Αφού $\Delta > 0$, θα έχουμε $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+13}{12} = 2$ και $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-13}{12} = -\frac{7}{6}$.

Παρατήρηση: Μπορούμε εύκολα να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο:

$$6x^2 + x - 7 = 6(x-2)\left(x + \frac{7}{6}\right).$$

Παράδειγμα 6: Να λυθεί η εξίσωση $x^2 + x + 1 = 0$.

Βήμα 1: Παρατηρούμε ότι $a = 1,\ b = 1,\ c = 1$

Βήμα 2: Υπολογίζουμε την διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$.

Βήμα 3: Αφού $\Delta < 0$, η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

Παράδειγμα 7: Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $x^2 - 2y^2 - xy$.

Μπορούμε να θεωρήσουμε την παράσταση ως τριώνυμο με μεταβλητή το x.

$$x^2 - 2y^2 - xy = x^2 - yx - 2y^2$$

Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε $a = 1,\ b = -y,\ c = -2y^2$. Επομένως, η διακρίνουσα θα είναι $\Delta = (-y)^2 - 4 \cdot (-2y^2) = y^2 + 8y^2 = 9y^2$. Επομένως οι ρίζες του τριωνύμου θα είναι:

$x_1 = \frac{y+3y}{2} = \frac{4y}{2} = 2y$ και $x_2 = \frac{y-3y}{2} = \frac{-2y}{2} = -y$. Επομένως θα έχουμε:

$$x^2 - 2y^2 - xy = (x-2y)(x+y).$$

ΙΙ. Επίλυση Ανισώσεων 2ου Βαθμού

Οι ανισώσεις 2ου βαθμού λύνονται και πάλι με βάση τη Διακρίνουσα. Συγκεκριμένα, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1: Φέρνουμε την ανίσωση στη μορφή $\boldsymbol{ax^2+bx+c>0}$ (ή $\boldsymbol{ax^2+bx+c<0}$).

Βήμα 2: Υπολογίσουμε την τιμή της Διακρίνουσας $\boldsymbol{\Delta=b^2-4ac}$.

Βήμα 3: Ανάλογα με την τιμή της Διακρίνουσας βρίσκουμε το πρόσημο του τριωνύμου $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$. Συγκεκριμένα:

- Αν $\Delta>0$, τότε το πρόσημο του τριωνύμου δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		Ομόσημο του a	0	Ετερόσημο του a	0	Ομόσημο του a	

- Αν $\Delta=0$, τότε το πρόσημο δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	$-\infty$		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		Ομόσημο του a	0	Ομόσημο του a	

- Αν $\Delta<0$, τότε το πρόσημο του τριωνύμου είναι παντού ομόσημο του α, δηλαδή:

	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		Ομόσημο του a	

Παρατηρήστε ότι το πρόσημο του τριωνύμου ταυτίζεται με το πρόσημο του συντελεστή a, εκτός από μια «λωρίδα» μεταξύ των δύο ριζών x_1και x_2 του τριωνύμου. Στην περίπτωση όπου η Διακρίνουσα είναι ίση με το 0, η λωρίδα αυτή εκφυλίζεται σε μια γραμμή. Επομένως το τριώνυμο έχει το ίδιο πρόσημο με τον συντελεστή a για κάθε πραγματικό αριθμό x, εκτός από τη διπλή ρίζα στην οποία μηδενίζεται. Στην περίπτωση όπου η Διακρίνουσα είναι αρνητική η λωρίδα αυτή εξαφανίζεται και το τριώνυμο έχει το ίδιο πρόσημο για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Παράδειγμα 8. Να λυθεί η ανίσωση $3x^2+x\geq 0$.

Είδαμε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι το 0 και το $-\frac{1}{3}$. Το πρόσημο του τριωνύμου δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$3x^2+x$		+	0	-	0	+	

Εμείς θέλουμε τις τιμές του x που κάνουν το τριώνυμο θετικό (+) ή μηδέν. Η απάντηση είναι ότι το σύνολο λύσεων είναι το $\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right] \cup [0, +\infty)$.

Παράδειγμα 9. Να λυθεί η ανίσωση $2x^2 - 8 < 0$.

Είδαμε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι το 2 και το -2. Το πρόσημο του τριωνύμου δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2x^2 - 8$		+	0	-	0	+	

Εμείς θέλουμε τις τιμές του x που κάνουν το τριώνυμο αρνητικό (-). Η απάντηση είναι ότι το σύνολο λύσεων είναι το $(-\infty,\ -2) \cup (2, +\infty)$.

Παράδειγμα 10. Να λυθεί η ανίσωση $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$.

Είδαμε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι το 2 και το 3. Το πρόσημο του τριωνύμου δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-x^2 + 5x$		-	0	+	0	-	

Εμείς θέλουμε τις τιμές του x που κάνουν το τριώνυμο θετικό (+) ή μηδέν. Η απάντηση είναι ότι το σύνολο λύσεων είναι το $[2, 3]$.

Παράδειγμα 11. Να λυθεί η ανίσωση $9x^2 + 30x + 25 \geq 0$.

Είδαμε ότι το τριώνυμο έχει μια διπλή ρίζα το $-\frac{5}{3}$. Το πρόσημο του τριωνύμου δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	$-\infty$		3		$+\infty$
$9x^2 + 30x + 25$		+	0	+	

Εμείς θέλουμε τις τιμές του x που κάνουν το τριώνυμο θετικό (+) ή μηδέν. Η απάντηση είναι ότι το σύνολο λύσεων είναι όλο το R.

Παράδειγμα 12. Να λυθεί η ανίσωση $(3x-1)(2x+1)<6$.

Εργαζόμενοι όπως στο παράδειγμα 5, μπορούμε να δείξουμε ότι η παραπάνω ανίσωση μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως $6x^2+x-7<0$. Το πρόσημο του τριωνύμου δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	$-\infty$		$-\frac{7}{6}$		2		$+\infty$
$6x^2+x-7$		+	0	-	0	+	

Εμείς θέλουμε τις τιμές του x που κάνουν το τριώνυμο θετικό (+). Η απάντηση είναι ότι το σύνολο λύσεων είναι το $\left(-\frac{7}{6},\ 2\right)$.

Παράδειγμα 13. Να λυθεί η ανίσωση $x^2+x+1>0$.

Είδαμε ότι το τριώνυμο αυτό δεν έχει ρίζες. Το πρόσημό του δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

	$-\infty$		$+\infty$
$6x^2+x-7$		+	

Εμείς θέλουμε τις τιμές του x που κάνουν το τριώνυμο θετικό (+). Η απάντηση είναι ότι το σύνολο λύσεων είναι όλο το R.

Ασκήσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

Α) $x^2-4\sqrt{3}x+9=0$, Β) $x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}=0$, Γ) $\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}=-\frac{1}{6}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

Α) $\frac{x}{x-1}+\frac{x+1}{x+2}=\frac{11}{4}$ Β) $\frac{1}{x}-\frac{5}{6x}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$ Γ) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{2x^2-3}{x-1}=\frac{3x^3-1}{x^2-x}$

3. Για ποιές τιμές της παραμέτρου λ η εξίσωση $3x^2-2x+(1-5\lambda)=0$ έχει δύο ρίζες άνισες;

4. Για ποιές τιμές της παραμέτρου λ η εξίσωση $(3\lambda-2)x^2-2(\lambda+1)x+(6-2\lambda)=0$ έχει δύο ίσες ρίζες; Ποιές είναι αυτές;

5. Να βρεθεί ο λ ώστε ο αριθμός -2 να είναι ρίζα της εξίσωσης $(\lambda^2-2\lambda-2)x^2+2(4\lambda+7)x+2\lambda^2=0$.

6. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου λ, ώστε η εξίσωση $x^2-2x+(\lambda-2)=0$ να έχει δύο ρίζες ετερόσημες.

7. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου λ, ώστε η εξίσωση $x^2 - 2x + (\lambda - 2) = 0$ να έχει δύο διαφορετικές θετικές ρίζες;

8. Να βρεθεί ο λ έτσι ώστε η εξίσωση $x^2 - (2\lambda - 3)x + (\lambda - 1) = 0$ να έχει δύο διαφορετικές ρίζες, από τις οποίες η μία να είναι διπλάσια της άλλης.

9. Να λύσετε τις ανισώσεις

Α) $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ Β) $5x^2 + 1 \geq 2x$ Γ) $x^2 - 3x + 5 > 0$

10. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 2(3 - \lambda)x - \lambda + 3 = 0$ έχει δύο διαφορετικές ρίζες.

11. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε η ανίσωση $(\lambda - 4)x^2 + (\lambda - 6)x + (\lambda - 5) > 0$, να αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

12. Να βρείτε τις τιμές του λώστε η εξίσωση $(\lambda - 3\mu)x^2 + 2(1 - 4\mu)x - 5(\mu + 1) = 0$ να έχει πραγματικές ρίζες για κάθε πραγματικό αριθμό μ.