Μαθηματική Επαγωγή

Η Μαθηματική Επαγωγή είναι μια τεχνική που χρησιμοποιείται για την απόδειξη ισχυρισμών σε καλά διατεταγμένα σύνολα (δηλαδή σύνολα των οποίων όλα τα μη κενά υποσύνολα έχουν ένα ελάχιστο στοιχείο). Αποτελεί μια μορφή ευθείας απόδειξης, που συνήθως χρησιμοποιείται για την απόδειξη προτάσεων με φυσικούς αριθμούς. Η λογική της τεχνικής μπορεί να περιγραφεί παραστατικά μέσω του παιχνιδιού Dominoes: Αν τοποθετήσουμε τα πλακίδια του Dominoes (εικόνα 1) έτσι ώστε αν πέσει ένα τότε να πέσει και το επόμενο, τότε είναι προφανές ότι αν ρίξουμε το πρώτο πλακίδιο, θα πέσουν διαδοχικά όλα τα πλακίδια. Στο παρόν φυλλάδιο σημειώσεων, ορίζουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, δίνουμε ορισμένα ενδιαφέροντα ιστορικά στοιχεία και παρουσιάζουμε απλές εφαρμογές και παραδείγματα.

Σχήμα 1: Η λογική της μαθηματικής επαγωγής μπορεί να αναπαρασταθεί με το παιχνίδι Dominoes.

1 Ιστορικά Στοιχεία

Η πατρότητα της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής απασχολεί την ιστορική έρευνα εδώ και αιώνες. Έχουν διατυπωθεί διάφορες θεωρίες και απόψεις που πολλές φορές είναι επηρεασμένες από τις προσωπικές επιθυμίες των ερευνητών. Οι περισσότεροι πάντως θεωρούν τον Γάλλο Blaise Pascal ως τον πρώτο μαθηματικό που διατύπωσε τη μαθηματική επαγωγή με σαφή και συστηματικό ορισμό. Ιστορικά, η άποψη αυτή επικρατούσε κατά τον 19ο αιώνα μέχρι και τις αρχές του 20ου αιώνα. Το 1909 δημοσιεύθηκε ένα άρθρο τριών σελίδων του Ιταλού μαθηματικού George Vacca[1] στο γνωστό περιοδικό Bulletin of the American Mathematical Society, ο οποίος υποστήριζε ότι ο πρώτος μαθηματικός που χρησιμοποίησε την επαγωγή συστηματικά ήταν ο Ιταλός βενεδικτίνος μοναχός Francesco Maurolico ή Φραγκίσκος Μαυρόλυκος. Το άρθρο του έκανε μεγάλη εντύπωση στην μαθηματική κοινότητα της εποχής και η υπόθεσή του έγινε δεκτή από τους πολλούς χωρίς αμφισβήτηση. Μάλιστα έγινε γνωστό ότι ο Pascal αναφέρθηκε στο έργο του Μαυρόλυκου (σε ιδέες σχετικές με την επαγωγή), σε μια επιστολή του στον Carcavi [7]. Το σχόλιο του Pascal αφορά την απόδειξη της πρότασης ότι το διπλάσιο του n-οστού τριγωνικού αριθμού μείον το n ισούται με n^2. Σε αυτό το σημείο ο Pascal αναφέρει ότι η απόδειξη της σχέσης είναι εύκολη κατά τον Μαυρόλυκο, δείχνοντας έτσι ότι μάλλον γνώριζε το έργο του. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Μαυρόλυκος (1494-1575) ήταν ελληνικής καταγωγής μαθηματικός που είχε εντρυφήσει στη μελέτη της ελληνικής γραμματείας και βοήθησε ιδιαίτερα στην απορρόφηση αυτών των γνώσεων στη Δύση. Η οικογένειά του μετακόμισε από την Κωνσταντινούπολη μετά την πτώση της Πόλης (1453) και εγκαταστάθηκε στη Μεσσήνη της Σικελίας. Ο G. Vacca υποστήριζε πως ο Μαυρόλυκος στο έργο του “Arithmeticorum libri duo”, που γράφτηκε το 1557 και δημοσιεύθηκε το 1575, έκανε συστηματική χρήση μιας μεθόδου που μοιάζει πολύ με την μαθηματική επαγωγή. Για παράδειγμα, ο Μαυρόλυκος χρησιμοποίησε τη μέθοδο για να αποδείξει ότι το άθροισμα των n πρώτων περιττών αριθμών είναι ίσο με n^2.

Μερικές δεκαετίες αργότερα (1953) ο Ολλανδός μαθηματικός (γερμανικής καταγωγής) Hans Freudenthal μελέτησε το εν λόγω βιβλίο του Μαυρόλυκου και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι όντως σε μερικά σημεία του βιβλίου φαίνεται πως χρησιμοποιείται μια διαδικασία παρόμοια με τη μαθηματική επαγωγή [2]. Παρόλα αυτά ο Freudenthal υποστηρίζει ότι η μαθηματική επαγωγή δεν ορίζεται συστηματικά και με ακριβή τρόπο από τον Μαυρόλυκο. Αντίθετα θεώρησε ότι (όπως οι περισσότεροι πίστευαν πριν το 1909) ο Pascal πρέπει να αναφέρεται ως ο πατέρας της μαθηματικής επαγωγής, επειδή ήταν ο πρώτος που όρισε τη διαδικασία με αυστηρότητα και τη χρησιμοποίησε με συστηματικό τρόπο. Φαίνεται ότι Ο Freudenthal πίστευε πως ο Μαυρόλυκος δεν είχε ξεκάθαρη εικόνα της μαθηματικής επαγωγής, αλλά ότι ο Pascal συνέχισε και τελειοποίησε το δικό του έργο. Την ίδια άποψη διατύπωσε και ο Kokiti Hara [3], ο οποίος επίσης θεωρεί ότι ο Pascal πρέπει να θεωρείται ως ο πρώτος που πραγματικά κατάλαβε και χρησιμοποίησε την επαγωγή. Άλλοι ερευνητές εντόπισαν δείγματα μαθηματικής επαγωγής σε παλαιότερα έργα όπως αυτό του ραββίνου Levi ben Gerson (1288-1344) [4] ή των Αράβων μαθηματικών al-Karaji (953-1029) και al-Samaw'al (1130-1180) [5]. Είναι όμως κοινά αποδεκτό ότι οι πρώτες αναφορές σε ιδέες που σχετίζονται με τη μαθηματική επαγωγή γίνονται στο έργο του Ευκλείδη και στον Παρμενίδη του Πλάτωνα [8, 9]. Ίσως αυτά τα έργα να ήταν πηγή έμπνευσης για τον Μαυρόλυκο (που ξέρουμε ότι τα γνώριζε) και τους υπολοίπους.

(α) Blaise Pascal

(β) Φραγκίσκος Μαυρόλυκος

(γ) Ευκλείδης

Σχήμα 2: Πορτραίτα των μεγάλων μαθηματικών που σχετίζονται ιστορικά με τη μαθηματική επαγωγή Blaise Pascal, Φραγκίσκου Μαυρόλυκου και Ευκλείδη από την Αλεξάνδρεια.

2 Διατυπωση

Η μαθηματική επαγωγή συνήθως διατυπώνεται ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι η p είναι μια μαθηματική ιδιότητα. Θα λέμε ότι η $p(x)$ ισχύει, αν ο αριθμός x ικανοποιεί την ιδιότητα p. Υποθέτουμε ότι τα παρακάτω ισχύουν:

- Η $p(0)$ ισχύει.

- Αν η $p(n)$ ισχύει, για κάποιο φυσικό αριθμό n, τότε ισχύει και η $p(n+1)$.

Τότε αποδεικνύεται ότι η $p(n)$ ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν. Με βάση τα παραπάνω, η απόδειξη μιας πρότασης p με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής μπορεί να αναλυθεί σε τρία βήματα:

Σημείωση 1 (1η μορφή Μαθηματικής Επαγωγής).

Βήμα 1 (Βασικό Βήμα): Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = 0$. (Δηλαδή αποδεικνύουμε ότι ισχύει η $p(0)$.

Βήμα 2 (Επαγωγική Υπόθεση): Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για έναν τυχαίο φυσικό αριθμό $n = \nu$ και

Βήμα 3 (Επαγωγικό Βήμα): Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει και για τον αριθμό $n = \nu + 1$.

Τότε η πρόταση ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n.

Πρέπει να σημειωθεί ότι συχνά οι επαγωγικές αποδείξεις δεν αρχίζουν από τον αριθμό 0, αλλά από κάποιον θετικό φυσικό αριθμό $k > 0$. Σε αυτή την περίπτωση, η επαγωγική διαδικασία εξασφαλίζει την ισχύ της αντίστοιχης πρότασης για κάθε φυσικό αριθμό $n > k$. Επιπλέον, η αρχή της επαγωγής χρησιμεύει όχι μόνο σαν μέθοδος απόδειξης ισχυρισμών, αλλά και σαν μέθοδος ορισμού εννοιών για τους φυσικούς αριθμούς. Συγκεκριμένα αναφερόμαστε σε **αναδρομικούς ορισμούς** που χρησιμοποιούνται τόσο στα μαθηματικά όσο και στην επιστήμη της πληροφορικής. Ένα απλό παράδειγμα αναδρομικού ορισμού αποτελεί το $n!$ (n παραγοντικό). Αν και συνήθως ορίζεται με τον τύπο $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, μπορεί να οριστεί και αναδρομικά ως εξής:

$$\begin{aligned} &0! = 1 \text{ και} \\ &n! = (n-1)!n, \text{ για κάθε } n > 0. \end{aligned}$$

Ο πρώτος ορισμός αναφέρεται στον αρχικό φυσικό αριθμό, ενώ ο δεύτερος ορισμός ορίζει την έννοια για τον φυσικό αριθμό n, υποθέτοντας ότι έχει γίνει ο ορισμός για τον προηγούμενο φυσικό αριθμό $n-1$. Από την αρχή της επαγωγής, έπεται ότι ο αναδρομικός ορισμός ορίζει την έννοια για κάθε φυσικό αριθμό n. Ένα άλλο παράδειγμα αναδρομικού ορισμού είναι η αριθμητική και η γεωμετρική πρόοδος (γνωστές από τα μαθηματικά της Α′ Λυκείου). Για πάραδειγμα, ο παρακάτω αναδρομικός ορισμός:

$$\begin{aligned} &a_0 = 1 \text{ και} \\ &a_n = a_{n-1} + 2, \text{ για κάθε } n > 0, \end{aligned}$$

ορίζει την αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο το 1 και διαφορά $\omega = 2$, δηλαδή την ακολουθία των περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7, ... Ομοίως, ο αναδρομικός ορισμός

$$\begin{aligned} &a_0 = 1 \text{ και} \\ &a_n = 2a_{n-1}, \text{ για κάθε } n > 0, \end{aligned}$$

ορίζει τη γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο το 1 και λόγο $\lambda = 2$, δηλαδή την ακολουθία των δυνάμεων του 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... Μια ακόμη πολύ γνωστή ακολουθία, η οποία ορίζεται αναδρομικά, είναι η ακολουθία Fibonacci, για την οποία έχουμε:

$$a_0 = 1, a_1 = 1 \text{ και}$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ για κάθε } n > 1.$$

Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση ορίζονται οι δύο πρώτοι όροι της ακολουθίας και στη συνέχεια ορίζεται ο τυχαίος n-οστός όρος, υποθέτοντας ότι έχει οριστεί η ακολουθία για τον προηγούμενο φυσικό αριθμό $n-1$ και τον προ-προηγούμενο $n-2$. Οι πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Επίσης, ισχύει και η ακόλουθη τροποποιημένη μορφή της αρχής της επαγωγής:

Σημείωση 2 (2η μορφή Μαθηματικής Επαγωγής - Ισχυρή Μαθηματική Επαγωγή)**.**

Βήμα 1 (Βασικό Βήμα): Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = 0$. (Δηλαδή αποδεικνύουμε ότι ισχύει η $p(0)$).

Βήμα 2 (Επαγωγική Υπόθεση): Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς $k \leq \nu$ και

Βήμα 3 (Επαγωγικό Βήμα): Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει και για τον αριθμό $n = \nu + 1$.

Τότε η πρόταση ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n.

Ή διαφορά της δεύτερης (ισοδύναμης) μορφής της μαθηματικής επαγωγής με την πρώτη μορφή, φαίνεται στο Βήμα 2. Στην πρώτη μορφή, υποθέτουμε ότι ισχύει η πρόταση $p(\nu)$ και με βάση αυτή, προσπαθούμε να αποδείξουμε την $p(\nu + 1)$. Στη δεύτερη μορφή, υποθέτουμε ότι ισχύουν όλες οι προτάσεις $p(0), p(1), \ldots, p(\nu)$ και με βάση όλες αυτές προσπαθούμε να αποδείξουμε την $p(\nu + 1)$.

3 Παραδειγματα

Στη συνέχεια, παραθέτουμε μερικά παραδείγματα για να γίνει πλήρως κατανοητή η διαδικασία της μαθηματικής επαγωγής.

Παράδειγμα 3.1 *Αποδείξτε ότι* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, *για κάθε φυσικό αριθμό* n.

Λύση. Ακολουθούμε τα τρία βήματα της επαγωγής (1η μορφή).

Βήμα 1: Καταρχάς παρατηρούμε ότι για $n = 0$ έχουμε: $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}$. Επομένως, για $n = 0$ η δοσμένη σχέση ισχύει.

Βήμα 2: Υποθέτουμε ότι για $n = \nu$ ισχύει η δοσμένη σχέση, δηλαδή $\displaystyle\sum_{k=0}^{\nu} k = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$.

Βήμα 3: Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα πρέπει να δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = \nu+1$, δηλαδή θα πρέπει να δείξουμε ότι $\sum_{k=0}^{\nu+1} k = \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}$. Πράγματι, με απλές αλγεβρικές πράξεις παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\nu+1} k &= \sum_{k=0}^{\nu} k + (\nu+1),\\ &= \frac{\nu(\nu+1)}{2} + (\nu+1), \quad \text{(από την επαγωγική σχέση για } n=\nu)\\ &= \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \frac{2(\nu+1)}{2} = \frac{\nu(\nu+1)+2(\nu+1)}{2} = \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2},\end{aligned}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Παράδειγμα 3.2 (Ανισότητα Bernoulli) *Αν $a > -1$, τότε δείξτε ότι $(1+a)^n \geq 1 + na$, για κάθε φυσικό αριθμό n.*

Λύση. Ακολουθούμε τα τρία βήματα της επαγωγής (1η μορφή).

Βήμα 1: Είναι προφανές ότι για $n = 0$ η σχέση ισχύει.
Βήμα 2: Υποθέτουμε ότι για $n = \nu$ ισχύει η δοσμένη σχέση, δηλαδή $(1+a)^\nu \geq 1 + \nu a$.
Βήμα 3: Θα πρέπει να δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = \nu + 1$, δηλαδή θα πρέπει να δείξουμε ότι $(1+a)^{\nu+1} \geq 1 + (\nu+1)a$. Πράγματι,

$$(1+a)^{\nu+1} = (1+a)^\nu(1+a) \geq (1+\nu a)(1+a),$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε το προηγούμενο επαγωγικό βήμα και το ότι $a+1 > 0$ (υπόθεση). Επομένως,

$$\begin{aligned}(1+a)^{\nu+1} &\geq (1+\nu a)(1+a) = 1 + a + \nu a + \nu a^2\\ &= 1 + (1+\nu)a + \nu a^2 \geq 1 + (1+\nu)a,\end{aligned}$$

αφού $\nu a^2 \geq 0$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Παράδειγμα 3.3 *Κάθε φυσικός αριθμός είναι είτε άρτιος είτε περιττός.*

Λύση.
Βήμα 1: Είναι προφανές ότι ο $n = 0$ είναι άρτιος (δηλαδή διαιρείται με το 2).
Βήμα 2: Υποθέτουμε ότι ο αριθμός $n = \nu$ είναι είτε άρτιος είτε περιττός.
Βήμα 3: Θα αποδείξουμε ότι ο αριθμός $n = \nu + 1$ είναι είτε άρτιος είτε περιττός. Αν ο αριθμός ν είναι άρτιος, τότε θα υπάρχει ένας φυσικός k τέτοιος ώστε $\nu = 2k$. Οπότε, θα ισχύει ότι $\nu + 1 = 2k + 1$, δηλαδή ότι ο αριθμός $\nu + 1$ είναι περιττός. Ομοίως, αν ο ν είναι περιττός, τότε θα υπάρχει ένας φυσικός k τέτοιος ώστε $\nu = 2k+1$. Επομένως, θα έχουμε $\nu+1 = 2k+1+1 = 2k+2 = 2(k+1)$, δηλαδή ο $\nu + 1$ είναι άρτιος.

□

Παράδειγμα 3.4 *Αποδείξτε ότι* $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, *για κάθε φυσικό αριθμό* n.

Λύση.

Βήμα 1: Είναι προφανές ότι για $n = 0$ η σχέση ισχύει.

Βήμα 2: Υποθέτουμε ότι για $n = \nu$ έχουμε $\sum_{k=0}^{\nu} k^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$.

Βήμα 3: Θα αποδείξουμε ότι $n = \nu + 1$ ισχύει: $\sum_{k=0}^{\nu+1} k^2 = \frac{(\nu+1)(\nu+2)(2\nu+3)}{6}$. Εξάγοντας τον τελευταίο όρο από το άθροισμα, έχουμε:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\nu+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{\nu} k^2 + (\nu+1)^2 \\ &= \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + (\nu+1)^2 \quad (\text{από το προηγούμενο βήμα}) \\ &= \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1) + 6(\nu+1)^2}{6} = \frac{(\nu+1)\left(\nu(2\nu+1) + 6(\nu+1)\right)}{6} \\ &= \frac{(\nu+1)(2\nu^2+7\nu+6)}{6}.\end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε τον δεύτερο παράγοντα του αριθμητή ως τριώνυμο (ως προς ν) και υπολογίσουμε την αντίστοιχη διακρίνουσα, μπορούμε να δούμε ότι έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και $-\frac{3}{2}$. Επομένως, με χρήση της παραγοντοποίησης τριωνύμου θα έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{\nu+1} k^2 = \frac{2(\nu+1)(\nu+2)\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{6} = \frac{(\nu+1)(\nu+2)(2\nu+3)}{6},$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Παράδειγμα 3.5 *Αποδείξτε ότι* $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, *για κάθε φυσικό αριθμό* n.

Λύση.

Βήμα 1: Είναι προφανές ότι για $n = 0$ η σχέση ισχύει.

Βήμα 2: Υποθέτουμε ότι για $n = \nu$ έχουμε $\sum_{k=0}^{\nu} k^3 = \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2$.

Βήμα 3: Θα αποδείξουμε ότι $n = \nu + 1$ ισχύει: $\sum_{k=0}^{\nu+1} k^3 = \left(\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}\right)^2$. Ακολουθώντας παρόμοια μεθοδολογία με τα παραδείγματα 3.1 και 3.4 έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{\nu+1} k^3 = \sum_{k=0}^{\nu} k^3 + (\nu+1)^3 = \frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4} + \frac{4(\nu+1)^3}{4}$$
$$= \frac{(\nu+1)^2(\nu^2+4\nu+4)}{4} = \frac{(\nu+1)^2(\nu+2)^2}{4},$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Παράδειγμα 3.6 *Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n και κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών $a, b \in \mathbb{R}$, ισχύει $\frac{a^n+b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^\nu$.*

Λύση.

Βήμα 1: Είναι προφανές ότι για $n = 0$ η σχέση ισχύει ως ισότητα.

Βήμα 2: Υποθέτουμε ότι για $n = \nu$ έχουμε $\frac{a^\nu+b^\nu}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^\nu$.

Βήμα 3: Θα αποδείξουμε ότι για $n = \nu+1$ ισχύει: $\frac{a^{\nu+1}+b^{\nu+1}}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{\nu+1}$. Παίρνοντας το δεξιό μέλος της ζητούμενης σχέσης έχουμε:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\nu+1} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^{\nu}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\leq \frac{a^\nu+b^\nu}{2}\frac{a+b}{2} \quad \text{(χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα)}$$
$$= \frac{a^{\nu+1}+b^{\nu+1}+a^\nu b+b^\nu a}{4}.$$

Μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ότι αν αντικαταστήσουμε τους όρους $a^\nu b + b^\nu a$ με $a^{\nu+1}+b^{\nu+1}$, τότε εύκολα προκύπτει το ζητούμενο. Τα δύο αθροίσματα βέβαια δεν είναι ίσα μεταξύ τους, μπορούμε να αποδείξουμε όμως ότι $a^\nu b + b^\nu a < a^{\nu+1}+b^{\nu+1}$. Πράγματι,

$$a^\nu b + b^\nu a < a^{\nu+1}+b^{\nu+1} \iff$$
$$a^\nu b + b^\nu a - a^{\nu+1}+b^{\nu+1} < 0 \iff$$
$$(a-b)(b^n-a^n) < 0.$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής, επομένως και η αρχική ισοδύναμη ανισότητα ισχύει. Με βάση αυτή τη σχέση μπορούμε να αποδείξουμε τη σχέση του τελευταίου επαγωγικού βήματος:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\nu+1} \leq \frac{a^{\nu+1}+b^{\nu+1}+a^\nu b+b^\nu a}{4}$$
$$\leq \frac{a^{\nu+1}+b^{\nu+1}+a^{\nu+1}+b^{\nu+1}}{4} = \frac{2a^{\nu+1}+2b^{\nu+1}}{4}$$
$$= \frac{a^{\nu+1}+b^{\nu+1}}{2}.$$

□

Παράδειγμα 3.7 *Αποδείξτε ότι ο αριθμός $8^n - 3^n$ διαιρείται από το 5, για κάθε φυσικό αριθμό n.*

Λύση.

Βήμα 1: Για $n = 0$, έχουμε $8^1 - 3^1 = 5$.

Βήμα 2: Υποθέτουμε ότι για $n = \nu$ ο αριθμός $8^\nu - 3^\nu$ διαιρείται από το 5. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει αριθμός $k \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε $8^\nu - 3^\nu = 5k$.

Βήμα 3: Θα αποδείξουμε ότι για $n = \nu + 1$ ο αριθμός $8^{\nu+1} - 3^{\nu+1}$ διαιρείται από το 5. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} 8^{\nu+1} - 3^{\nu+1} &= 8 \cdot 8^\nu - 3 \cdot 3^\nu = 5 \cdot 8^\nu + 3 \cdot 8^\nu - 3 \cdot 3^\nu = 5 \cdot 8^\nu + 3(8^\nu - 3^\nu) \\ &= 5 \cdot 8^\nu + 3 \cdot 5k \quad \text{(από το προηγούμενο επαγωγικό βήμα)} \\ &= 5(8^\nu + 3k). \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι ο αριθμός $8^{\nu+1} - 3^{\nu+1}$ είναι πολλαπλάσιος του 5. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Σημειώνουμε ότι υπάρχει και άλλος τρόπος για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό, χωρίς να εφαρμόσουμε επαγωγή. Αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή ταυτότητα της διαφοράς δυνάμεων. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} 8^n - 3^n &= (8 - 3)\left(8^{n-1} + 8^{n-2} \cdot 3 + 8^{n-3} \cdot 3^2 + \cdots + 8 \cdot 3^{n-2} + 3^{n-1}\right) \\ &= 5\left(8^{n-1} + 8^{n-2} \cdot 3 + 8^{n-3} \cdot 3^2 + \cdots + 8 \cdot 3^{n-2} + 3^{n-1}\right). \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 3.8 *Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n > 1$ και για κάθε πραγματικό αριθμό a, με $0 < a < \frac{1}{n}$, ισχύει $(1 + a)^n < \frac{1}{1-na}$.*

Λύση.

Βήμα 1: Για $n = 2$, η σχέση δίνει $(1 + a)^2 < \frac{1}{1-2a}$. Παρατηρούμε ότι αφού η σχέση ισχύει για $0 < a < \frac{1}{2}$, η παράσταση $1 - 2a$ είναι θετική. Επομένως αν πολλαπλασιάσουμε την ανισότητα, έχουμε τις εξής ισοδύναμες σχέσεις:

$$(1 + a^2 + 2a)(1 - 2a) < 1 \iff -2a^3 - 3a^2 < 0 \iff -a^2(2a + 3) < 0.$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής, επομένως η δοσμένη σχέση ισχύει για $n = 2$.

Βήμα 2: Υποθέτουμε ότι για $n = \nu$ ισχύει $(1 + a)^\nu < \frac{1}{1-\nu a}$, για κάθε $0 < a < \frac{1}{\nu}$.

Βήμα 3: Θα αποδείξουμε ότι για $n = \nu + 1$ ισχύει η σχέση $(1 + a)^{\nu+1} < \frac{1}{1-(\nu+1)a}$, για κάθε $0 < a < \frac{1}{\nu+1}$. Πράγματι, ξεκινώντας από το αριστερό μέλος και λαμβάνοντας υπ΄ όψη την σχέση του προηγούμενου βήματος και το ότι για $0 < a < \frac{1}{\nu+1} < \frac{1}{\nu}$, έχουμε $1 - \nu a > 0$, παίρνουμε:

$$(1 + a)^{\nu+1} = (1 + a)^\nu(1 + a) < \frac{1}{1 - \nu a}(1 + a) = \frac{1 + a}{1 - \nu a}.$$

Τονίζουμε ότι η σχέση $0 < a < \frac{1}{\nu+1}$ μας εξασφαλίζει ότι $0 < a < \frac{1}{\nu}$ και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση του προηγούμενου επαγωγικού βήματος γι αυτή την τιμή του a. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{1 + a}{1 - \nu a} < \frac{1}{1 - (\nu + 1)a}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με το ΕΚΠ (αφού και οι δύο παρονομαστές είναι θετικοί) παίρνουμε τις παρακάτω ισοδύναμες σχέσεις:

$$(1+a)(1-\nu a-a)<1-\nu a) \Longleftrightarrow -\nu a^2-a^2<0 \Longleftrightarrow -a^2(\nu+1)<0.$$

Η τελευταία σχέση είναι προφανώς αληθής, επομένως η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

$\square$

Παράδειγμα 3.9 *Δείξτε ότι $n^{n+1}>(n+1)^n$, για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 3$.*

Λύση. Παρατηρούμε ότι η δοσμένη σχέση μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής:

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}<1 \Longleftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n<n \Longleftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<n.$$

Βήμα 1: Για $n=3$, η σχέση ισχύει, αφού $3^4>4^3$.
Βήμα 2: Υποθέτουμε ότι για $n=\nu$ ισχύει $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu<\nu$.
Βήμα 3: Θα αποδείξουμε ότι για $n=\nu+1$ ισχύει η σχέση $\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}<\nu+1$. Παίρνοντας το αριστερό μέλος της σχέσης, έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1} &< \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\\ &<\nu\left(1+\frac{1}{\nu}\right)=\nu\frac{\nu+1}{\nu}=\nu+1.\end{aligned}$$

$\square$

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο παράδειγμα, θα ορίσουμε τον αριθμό των συνδυασμών n ανά k. Ο αριθμός αυτός συμβολίζεται με $\binom{n}{k}$ και εκφράζει το πλήθος των διαφορετικών συνδυασμών ομάδων από k στοιχεία που μπορούμε να κατασκευάσουμε, από ένα σύνολο n στοιχείων. Από τη συνδυαστική γνωρίζουμε ότι

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.1}$$

Έτσι για παράδειγμα οι πιθανές εξάδες που μπορούν να κατασκευαστούν από 49 συνολικά στοιχεία είναι $\binom{49}{6}=13983816$. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} \tag{1.2}$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}. \tag{1.3}$$

Παράδειγμα 3.10 (Διωνυμικό Ανάπτυγμα) *Δείξτε ότι για κάθε* $a, b \in \mathbb{R}$ *και για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{1.4}$$

Λύση.

Βήμα 1: Για $n = 0$, η σχέση προφανώς ισχύει.

Βήμα 2: Υποθέτουμε ότι για $n = \nu$ ισχύει $(a+b)^\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} a^{\nu-k} b^k$.

Βήμα 3: Θα αποδείξουμε ότι για $n = \nu + 1$ ισχύει η σχέση $(a+b)^{\nu+1} = \sum_{k=0}^{\nu+1} \binom{\nu+1}{k} a^{\nu+1-k} b^k$.

Παίρνοντας το αριστερό μέλος έχουμε:

$$\begin{aligned}(a+b)^{\nu+1} = (a+b)^\nu (a+b) &= \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} a^{\nu-k} b^k \cdot (a+b)\\ &= \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} a^{\nu+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} a^{\nu-k} b^{k+1}.\end{aligned}$$

Εφαρμόζωντας την αλλαγή μεταβλητής $\mu = k + 1$ στο δεύτερο άθροισμα, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}(a+b)^{\nu+1} &= \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} a^{\nu+1-k} b^k + \sum_{\mu=1}^{\nu+1} \binom{\nu}{\mu-1} a^{\nu+1-\mu} b^\mu\\ &= a^{\nu+1} + \sum_{k=1}^{\nu} \binom{\nu}{k} a^{\nu+1-k} b^k + \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{\nu}{\mu-1} a^{\nu+1-\mu} b^\mu + b^{\nu+1},\end{aligned}$$

όπου, στην τελευταία σχέση έχουμε εξάγει τον πρώτο όρο του πρώτου αθροίσματος (δηλαδή τον όρο $k = 0$) και τον τελευταίο όρο του δεύτερου αθροίσματος (δηλαδή τον όρο $\mu = \nu + 1$). Έτσι προκύπτει:

$$\begin{aligned}(a+b)^{\nu+1} &= a^{\nu+1} + \sum_{k=1}^{\nu} \left[\binom{\nu}{k} a^{\nu+1-k} b^k + \binom{\nu}{k-1} a^{\nu+1-k} b^k \right] + b^{\nu+1}\\ &= a^{\nu+1} + \sum_{k=1}^{\nu} \left[\binom{\nu}{k} + \binom{\nu}{k-1} \right] a^{\nu+1-k} b^k + b^{\nu+1}\\ &= a^{\nu+1} + \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu+1}{k} a^{\nu+1-k} b^k + b^{\nu+1}\\ &= \sum_{k=0}^{\nu+1} \binom{\nu+1}{k} a^{\nu+1-k} b^k,\end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο άθροισμα έχουμε ενσωματώσει και τους όρους $a^{\nu+1}$ και $b^{\nu+1}$ (που προκύπτουν για $k = 0$ και $k = \nu + 1$ αντίστοιχα.

$\square$

Σημειώνουμε ότι ο τύπος για το διωνυμικό ανάπτυγμα που δώσαμε στο παράδειγμα 3.10 είναι άμεσα συνυφασμένος με το τρίγωνο του Pascal. Το τρίγωνο του Pascal είναι μια απλή δενδροειδής κατασκευή (σχήμα 3), η οποία σε κάθε επίπεδό της, δίνει τους συντελεστές του αναπτύγματος $(a+b)^n$, αν αυτοί τοποθετηθούν σε σειρά, ξεκινώντας από τον συντελεστή του όρου a^n και συνεχίζοντας έτσι ώστε να ο εκθέτης του a να μειώνεται, ενώ ο εκθέτης του b να αυξάνεται:

$$a^n, a^{n-1}b, a^{n-2}b^2, \ldots, a^2b^{n-2}, ab^{n-1}, b^n.$$

Η διαδικασία παραγωγής του τριγώνου του Pascal είναι η ακόλουθη (σχήμα 3α):

- Ξεκινάμε την κατασκευή του δενδροδιαγράμματος με τον αριθμό 1.
- Διακλαδώνουμε την ρίζα του δέντρου δημιουργώντας δύο φύλλα με τον αριθμό 1 επίσης.
- Διακλαδώνουμε κάθε επόμενο φύλλο δημιουργώντας δύο νέα φύλλα κάθε φορά. Έτσι δημιουργούνται φύλλα που συνδέονται με τα προηγούμενα. Κάθε νέο φύλλο παίρνει τιμή ίση με το άθροισμα των δύο συνδεδεμένων φύλλων του προηγούμενου επιπέδου.

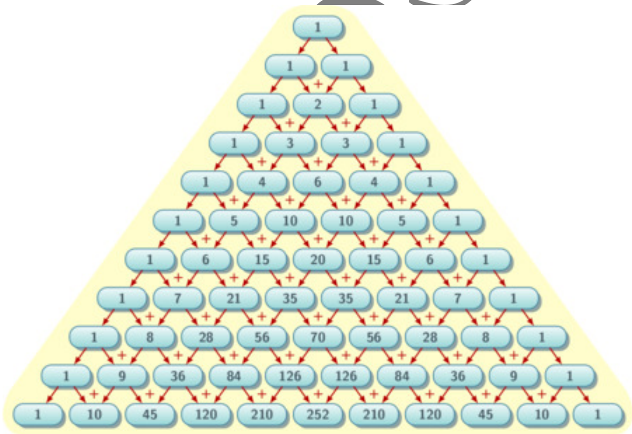
Έτσι προκύπτει η ακόλουθη σειρά αριθμών:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
 & & & & & \vdots & & \vdots & & & & & \\
 & 1 & \ldots & & & \binom{n-1}{k-1} & & \binom{n-1}{k} & & & \ldots & 1 & \\
1 & \ldots & & & & & \binom{n}{k} & & & & & \ldots & 1
\end{array}$$

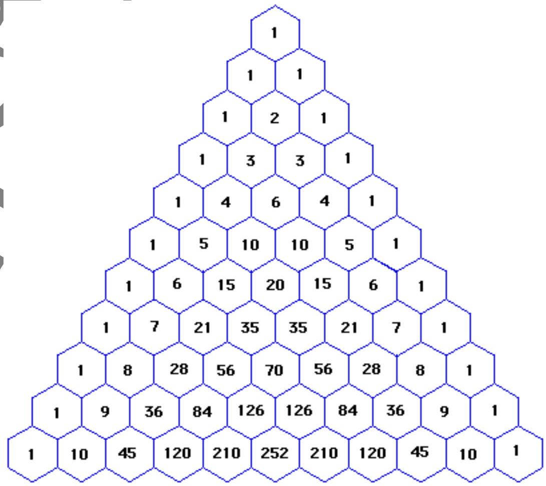
Παρατηρούμε ότι αυτός ο τρόπος παραγωγής των αριθμών, δημιουργεί ουσιαστικά όλους τους αριθμούς συνδυασμών n ανά k σε κάθε επίπεδο. Γι αυτό το λόγο κάθε επίπεδο περιέχει (όπως αναφέρθηκε) τους συντελεστές του διωνυμικού αναπτύγματος. Παρακάτω δίνονται τα πρώτα 5 αναπτύγματα:

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= 1a + 1b\\
(a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2\\
(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3\\
(a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4\\
(a+b)^5 &= 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5
\end{aligned}$$

Αξίζει να αναφερθεί ότι το τρίγωνο Pascal μπορεί να σχεδιαστεί και με τη μορφή εξαγωνικού πλέγματος (σχήμα 3β).



(α) Το κλασσικό τρίγωνο του Pascal με δενδροειδή μορφή.



(β) Το τρίγωνο του Pascal σε μορφή εξαεδρικού πλέγματος.

Σχήμα 3: Διάφορες μορφές του τριγώνου του Pascal που δίνει τους συντελεστές του δυωνυμικού αναπτύγματος.

Παράδειγμα 3.11 (Παράδειγμα Ισχυρής μαθηματικής Επαγωγής) *Δείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός n μεγαλύτερος ή ίσος του 18 μπορεί να γραφεί στη μορφή*

$$n = 4\kappa + 7\lambda.$$

Δηλαδή κάθε ομάδα περισσότερων των 8 αντικειμένων μπορεί να χωριστεί σε ομάδες των τεσσάρων ή/και επτά αντικειμένων.

Λύση. Η απόδειξη θα γίνει με τη δεύτερη μορφή της μαθηματικής επαγωγής, την λεγόμενη ισχυρή επαγωγή.

Βήμα 1: Για $n = 18$, η σχέση προφανώς ισχύει, αφού $18 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7$. Επίσης παρατηρούμε ότι η σχέση ισχύει για $n = 19, 20, 21$, αφού $19 = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 7$, $20 = 5 \cdot 4$ και $21 = 3 \cdot 7$.

Βήμα 2: Υποθέτουμε ότι για όλους τους φυσικούς αριθμός $\{18, 19, 20, \ldots, \nu\}$ ισχύει η υπόθεση. Δηλαδή, για κάθε n με $18 \leq n \leq \nu$ υπάρχουν φυσικοί αριθμοί κ_n, λ_n, τέτοιοι ώστε $n = 4\kappa_n + 7\lambda_n$.

Βήμα 3: Θα αποδείξουμε ότι για $n = \nu + 1$ ισχύει η ζητούμενη σχέση, δηλαδή υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $\kappa_{\nu+1}, \lambda_{\nu+1}$, τέτοιοι ώστε $\nu+1 = 4\kappa_{\nu+1} + 7\lambda_{\nu+1}$. Πράγματι, για τον αριθμό $\nu - 3$ έχουμε από την επαγωγική υπόθεση: $\nu - 3 = 4\kappa_{\nu-3} + 7\lambda_{\nu-3}$. Επομένως, $\nu + 1 = 4 + 4\kappa_{\nu-3} + 7\lambda_{\nu-3} = 4(1 + \kappa_{\nu-3}) + 7\lambda_{\nu-3}$.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι για να είναι σωστή η απόδειξη είναι απαραίτητο να ελέγξουμε την υπόθεση όχι μόνο για την τιμή $n = 18$ αλλά και για τις τιμές $19, 20$ και 21. Και αυτό γιατί στην απόδειξη της επαγωγικής διαδικασίας δεν χρησιμοποιήσαμε το προηγούμενο βήμα (n), αλλά το βήμα $n - 3$. Πήγαμε δηλαδή 4 βήματα πίσω. Σε αυτή την περίπτωση είναι απαραίτητο να ελέγξουμε την ισχύ της υπόθεσης για τις 4 πρώτες τιμές του n. Μπορούμε να δώσουμε μια γεωμετρική αναπαράσταση του προβλήματος ανατρέχοντας στο παράδειγμα των dominoes. Φανταστείτε ότι έχουμε αριθμήσει τα πλακίδια και τα έχουμε τοποθετήσει έτσι ώστε αν πέσει το 1ο να πέσει αμέσως μετά το 5ο, αν πέσει το 2ο να πέσει το 6ο κ.ο.κ. Δηλαδή η τοποθέτηση εξασφαλίζει ότι αν πέσει το πλακίδιο n θα ρίξει το πλακίδιο $n + 4$. Είναι προφανές, ότι αν ρίξουμε μόνο το πρώτο πλακίδιο, θα πέσει το 5ο, το 9ο, το 13ο, κ.λ.π. Τα υπόλοιπα θα παραμείνουν όρθια. Για να ρίξουμε όλα τα πλακίδια θα πρέπει να ρίξουμε και το 1ο και το 2ο και το 3ο και το 4ο. □

Για να δείξουμε τα προβλήματα που μπορούν να δημιουργηθούν από τη λανθασμένη χρήση της διαδικασίας της μαθηματικής επαγωγής, δίνουμε το παρακάτω χαρακτηριστικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.12 (ΛΑΘΟΣ!) *Δείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός n είναι άρτιος!*

Λύση. Προφανώς, η πρόταση δεν ισχύει. Θα δώσουμε μια λανθασμένη απόδειξη για τον παραπάνω ισχυρισμό με βάση την ισχυρή μαθηματική επαγωγή.

Βήμα 1: Για $n = 0$, η σχέση προφανώς ισχύει, αφού ο αριθμός 0 είναι άρτιος.

Βήμα 2: Υποθέτουμε ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί από το 0 μέχρι το ν είναι άρτιοι.

Βήμα 3: Θα αποδείξουμε ο αριθμός $n = \nu + 1$ είναι άρτιος. Πράγματι, από την επαγωγική υπόθεση ξέρουμε ότι οι αριθμοί ν και 1 είναι άρτιοι. Επομένως και το άθροισμά τους, δηλαδή ο αριθμός $\nu + 1$ είναι επίσης άρτιος.

Το λάθος στην παραπάνω διαδικασία δεν γίνεται εύκολα κατανοητό. Προσέξτε ότι δεν έχουμε χρησιμοποιήσει κάποιο από τα προηγούμενα βήματα, ούτε το αρχικό (το 0) αλλά χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι ο 1 είναι άρτιος, χωρίς να το έχουμε αποδείξει. Είναι σαν να έχουμε τοποθετήσει όλα τα dominoes στη σειρά έτσι ώστε, αν πέσει το δεύτερο (δηλαδή το $n = 1$), να πέσουν όλα τα επόμενα, αλλά εμείς αντί να ρίξουμε το δεύτερο πλακίδιο ρίχνουμε το πρώτο (δηλαδή το $n = 0$), το οποίο όμως δεν ρίχνει κανένα άλλο πλακίδιο. □

4 Ασκησεις

1. (Ανισότητα Cauchy). Αν $a_1, a_2, \ldots, a_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ τότε

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right\| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \|b_k|^2 \right).$$

   Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $a_k = 0$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots n$ ή αν $b_k = 0$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots n$, ή αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $a_k = c \cdot b_k$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots n$.
2. (Ανισότητα Weirstrass). Αν $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ τότε

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) > 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

   για κάθε $n \geq 2$.
3. (Ανισότητα αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου). Αν $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ τότε

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

   για κάθε $n \geq 2$.
4. (Ανισότητα Chebyshev). Αν $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ και $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, τότε

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right) \leq n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

5. Αν $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$ και $b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = 1$, τότε $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots a_n b_n)^2 \leq 1$.
6. Αν $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ τότε

$$(a_1 + a_2 + \ldots a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

Βιβλιογραφια

[1] Vacca George,"Maurolycus, the first discoverer of the principle of mathematical induction". Bull. Amer. Math. Soc. 16 (2): 70-73.

[2] Freudenthal Hans, "Zur Geschichte der vollstdndigen Induktion", Archives Internationales d"Histoire des Sciences, 6:17-37, 1953.

[3] Kokiti Hara, "Pascal et l'induction mathimatique", Revue d'histoire des sciences et de leurs applications Vol. 15, No. 3/4, PASCAL ET LES MATHIMATIQUES (JUILLET-DICEMBRE 1962), pp. 287-302.

[4] Rabinovitch Nachum L., "Rabbi Levi Ben Gershon and the origins of mathematical induction", Archive for History of Exact Sciences, January 1970, Volume 6, Issue 3, pp 237-248.

[5] Rashed R., "The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra", 1994.

[6] Fabio Acerbi, "Plato: Parmenides 149a7-c3. A Proof by Complete Induction?". Archive for History of Exact Sciences 55 (2000), 57-76.

[7] Bussey W. H., "The Origin of Mathematical Induction", The American Mathematical Monthly, Vol. 24, No. 5 (May, 1917), pp. 199-207.

[8] D. Fowler, "Could the Greeks Have Used Mathematical Induction? Did They Use It?", Physis. XXXI: 253-265, 1994.

[9] F. Acerbi. "Plato: Parmenides 149a7-c3. A Proof by Complete Induction?", Archive for History of Exact Sciences. 55: 57-76., 2000.