Διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$

1 Εσωτερικό Γινόμενο

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων δίνεται ως εξής:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Για το εσωτερικό γινόμενο ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$. Αν $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$, τότε $\vec{u} = \vec{0}$.
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot v + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
4. $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

2 Ευκλείδια Νόρμα

Με βάση το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να οριστεί η Ευκλείδια νόρμα ως εξής:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. $\|\vec{u}\| \geq 0$. Αν $\|\vec{u}\| = 0$ τότε $\vec{u} = 0$.
2. $\|\vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$.
3. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Το εσωτερικό γινόμενο και η αντίστοιχη ευκλείδια νόρμα μπορούν να οριστούν και για χώρους μεγαλύτερης διάστασης. Έτσι στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο ως $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$ και την αντίστοιχη νόρμα ως $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$. Μια σημαντική σχέση μεταξύ εσωτερικού γινομένου και νόρμας είναι η παρακάτω

Θεώρημα 1 (Ανισότητα Cauchy Schwartz)**.**

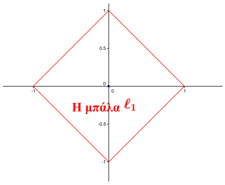
$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$, ή
$|u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n| \leq \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Μια νόρμα μετράει την απόσταση ενός διανύσματος $\vec{u}$ (δηλαδή του αντίστοιχου σημείου) από την αρχή των αξόνων. Επομένως η ποσότητα $\|\vec{u} - \vec{v}\|$ μετράει την απόσταση μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$. Η ευκλείδια νόρμα του $\mathbb{R}^3$ για παράδειγμα μετράει την κανονική απόσταση μεταξύ δύο σημείων, όπως την χρησιμοποιούμε στην καθημερινότητα. Όμως, εκτός από την ευκλείδια νόρμα (η οποία συχνά αναφέρεται ως ℓ_2 νόρμα) υπάρχουν και άλλες νόρμες που χρησιμοποιούνται στην πράξη.

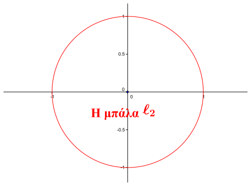
Τέτοιες νόρμες είναι για παράδειγμα η ℓ_1 (ή Μανχάταν ή Taxicab), η ℓ_∞ (ή Maximum) και η ℓ_p για $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}\|_1 &= |u_1| + |u_2| + \ldots |u_n| \\
\|\vec{u}\|_p &= (|u_1|^p + |u_2|^p + \ldots |u_n|^p)^{1/p} \\
\|\vec{u}\|_\infty &= \max\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}.
\end{aligned}$$

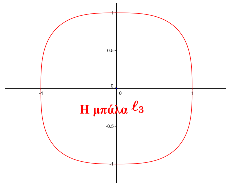
Σημειώνουμε ότι όσο το p αυξάνεται, η αντίστοιχη νόρμα του διανύσματος $\vec{u}$ μειώνεται, πλησιάζωντας την νόρμα ℓ_∞ (σχήμα 1).



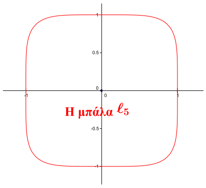
(α) $p = 1$



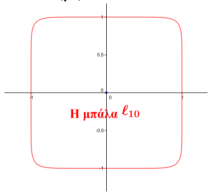
(β) $p = 2$



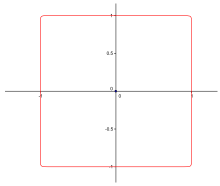
(γ) $p = 3$



(δ) $p = 5$



(ε) $p = 10$



(στ) $p = \infty$.

Σχήμα 1: Οι κόκκινες γραμμές απεικονίζουν το σύνολο των σημείων που απέχουν απόσταση ίση με 1 από την αρχή των αξόνων, σύμφωνα με την αντίστοιχη νόρμα ℓ_p.

3 Γωνια και Προβολη

Αποδεικνύεται ότι το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να δοθεί και από την σχέση:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta),}$$

όπου θ η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$. Επίσης, η προβολή του διανύσματος $\vec{v}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{u}$ δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{v},}$$

Τέλος, δύο διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ είναι κάθετα αν και μόνο αν $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

4 Εξωτερικο Γινομενο

Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ είναι ένα νέο διάνυσμα **κάθετο** και στο $\vec{x}$ και στο $\vec{y}$, το οποίο ορίζεται ως εξής:

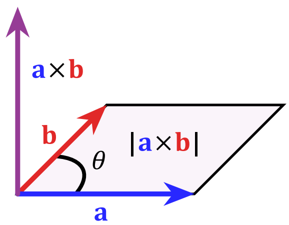
$$\vec{w} := \vec{u} \times \vec{v} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}.$$

Σημειώνουμε ότι εξωτερικό γινόμενο ορίζεται μόνο για διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Για το εξωτερικό γινόμενο ισχύουν τα παρακάτω:

$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{u} \times \vec{v}$
$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}^2\| \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ (Ταυτ. Lagrange)
$\vec{u} \times (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$
$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$
$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\theta)$

Σημείωση 1 (Γεωμετρική Ερμηνεία Εξωτερικού Γινομένου)**.**

Δύο μη συγγραμικά διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ ορίζουν ένα παραλληλόγραμμο. Το εμβαδόν αυτού του παραλληλογράμμου είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} \times \vec{v}$ (σχήμα 2).



Σχήμα 2: Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων και η γεωμετρική ερμηνεία του.

5 Μεικτο Γινομενο

Ως μεικτό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ορίζουμε τον πραγματικό αριθμό

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) := \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

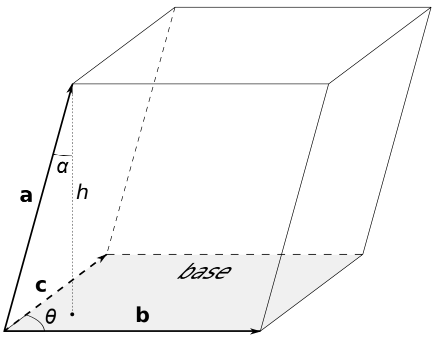
Για το μεικτό γινόμενο έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \\ &= -\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v}) = -\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = -\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) \end{aligned}$$

Με λίγα λόγια μπορούμε να κάνουμε μια *κυκλική μετατόπιση* (shift) των τριών διανυσμάτων χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα. Ενώ κάθε *αντιμετάθεση* (swap) δύο διανυσμάτων, απλώς αλλάζει το πρόσημο.

Σημείωση 2 (Γεωμετρική Ερμηνεία Μεικτού Γινομένου).

Τρία μη συνεππίπεδα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}, \vec{w}$ ορίζουν ένα παραλληλεπίπεδο. Ο όγκος αυτού του παραλληλεπιπέδου είναι ίσος με την απόλυτη τιμή του μεικτού γινομένου $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.



Σχήμα 3: Η γεωμετρική ερμηνεία του μεικτού γινομένου $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.