Βασικα Στοιχεια Τοπολογιας στον $\mathbb{R}^d$

Το φυλλάδιο αυτό περιέχει (πολύ περιληπτικά) τις βασικές έννοιες της τοπολογίας ευκλείδιων χώρων που χρειάζονται για τη μελέτη συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Όπου υπάρχει νόρμα αναφερόμαστε στην ευκλείδια νόρμα.

Ορισμός 1 *__Ανοιχτή σφαίρα__ (ή μπάλα) με κέντρο $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ και ακτίνα $r > 0$ ονομάζουμε το σύνολο*

$$S(\boldsymbol{x}_0, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < r\}.$$

Ορισμός 2 *__Κλειστή σφαίρα__ (ή μπάλα) με κέντρο $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ και ακτίνα $r \geq 0$ ονομάζουμε το σύνολο*

$$\hat{S}(\boldsymbol{x}_0, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leq r\}.$$

Ορισμός 3 *Δίνεται ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Θα λέμε ότι το A είναι __ανοικτό σύνολο__ αν για κάθε $\boldsymbol{x} \in A$, υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $S(\boldsymbol{x}, \epsilon) \subseteq A$.*

Ορισμός 4 *Δίνεται ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Θα λέμε ότι το A είναι __κλειστό σύνολο__ αν το συμπλήρωμά του (δηλαδή το σύνολο $\mathbb{R}^d - A$) είναι ανοικτό σύνολο.*

Ορισμός 5 *Δίνεται ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και ένα σημείο $\boldsymbol{x}_0 \in A$. Θα λέμε ότι το $\boldsymbol{x}_0$ είναι __σημείο συσσώρευσης__ του A, αν για κάθε $\epsilon > 0$, ισχύει $(S(\boldsymbol{x}_0, \epsilon) - \{\boldsymbol{x}_0\}) \cap A \neq \emptyset$. Ισοδύναμα, το $\boldsymbol{x}_0$ θα λέγεται σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\boldsymbol{x} \in A$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$, τέτοιο ώστε $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leq \epsilon$.*

Ορισμός 6 *Δίνεται ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και ένα σημείο $\boldsymbol{x}_0 \in A$. Θα λέμε ότι το $\boldsymbol{x}_0$ είναι __μεμονωμένο σημείο__ του A, αν δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, δηλαδή αν υπάρχει $\epsilon > 0$, για το οποίο $(S(\boldsymbol{x}_0, \epsilon) - \{\boldsymbol{x}_0\}) \cap A = \emptyset$. Ισοδύναμα, το $\boldsymbol{x}_0$ θα λέγεται μεμονωμένο σημείο του A αν υπάρχει $\epsilon > 0$, τέτοιο ώστε $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| > \epsilon$, για κάθε $\boldsymbol{x} \in A$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$.*

Ορισμός 7 *Το σύνολο όλων των σημείων συσσώρευσης του A συμβολίζεται με A' (μερικές φορές καλείται παράγωγο σύνολο). Το σύνολο αυτό είναι κλειστό.*

Ορισμός 8 *Δίνεται ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Ονομάζουμε __κλειστότητα__ του A το σύνολο*

$$\overline{A} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \ \text{υπάρχει ακολουθία } \boldsymbol{x}_n \in A \text{ με } \boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}\}.$$

Ισχύει ότι $\overline{A} = A \cup A'$.

Ορισμός 9 *Δίνεται ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Θα λέμε ότι το A είναι __φραγμένο__, αν υπάρχει αριθμός $M > 0$ για τον οποίο να ισχύει $\|\boldsymbol{x}\| \leq M$ για κάθε $\boldsymbol{x} \in A$.*

Ορισμός 10 *Δίνεται ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Θα λέμε ότι το A είναι* ***πλήρες****, αν κάθε βασική (συγκλίνουσα) ακολουθία στοιχείων του A συγκλίνει σε στοιχείο του A.*

Ορισμός 11 *Δίνεται ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Θα λέμε ότι το A είναι* ***συμπαγές****, αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Ορισμός 12 *Δίνεται ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Ως σύνορο του A ορίζουμε το παρακάτω σύνολο:*

$$\partial A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \text{ για κάθε } \epsilon > 0, S(\boldsymbol{x}, \epsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ ανδ } S(\boldsymbol{x}, \epsilon) \cap (\mathbb{R}^d - A) \neq \emptyset\}.$$

Σημείωση 1.

Οι παραπάνω έννοιες ορίζονται πιο γενικά σε μετρικούς χώρους. Δηλαδή σε χώρους όπου υπάρχει κάποιου είδους απόσταση (μετρική). Σε αυτή την περίπτωση, οι ορισμοί είναι λίγο διαφορετικοί (π.χ. ένα σύνολο λέγεται συμπαγές, αν κάθε κάλυψή του έχει πεπερασμένη υποκάλυψη). Στον $\mathbb{R}^d$ η αντίστοιχη απόσταση είναι η ευκλείδια και οι σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων είναι απλούστερες. Σημειώνουμε ότι:

- Υπάρχουν σύνολα που δεν είναι ούτε ανοικτά ούτε κλειστά (π.χ. το $A = (0, 1]$).
- Τα κλειστά σύνολα περιέχουν όλα τα σημεία συσσώρευσής τους.
- Οι ανοιχτές σφαίρες είναι ανοιχτά σύνολα. Οι κλειστές σφαίρες είναι κλειστά σύνολα.

Σύνολο A	Ιδιότητες	A'	$\overline{A}$	Μεμ. Σημεία	∂A
$A = (0, 1)$	ανοικτό, φραγμένο	$[0, 1]$	$[0, 1]$	$\emptyset$	$\{0, 1\}$
$A = [0, 1]$	κλειστό, φραγμένο	$[0, 1]$	$[0, 1]$	$\emptyset$	$\{0, 1\}$
$A = (0, 1]$	φραγμένο	$[0, 1]$	$[0, 1]$	$\emptyset$	$\{0, 1\}$
$A = (0, 1] \cup \{2\}$	φραγμένο	$[0, 1]$	$[0, 1] \cup \{2\}$	$\{2\}$	$\{0, 1, 2\}$
$A = (0, +\infty)$	ανοικτό	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$\emptyset$	$\{0\}$
$A = \{0, 1, 2\}$	κλειστό και φραγμένο	$\emptyset$	$\{0, 1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$
$A = \mathbb{N}$	κλειστό	$\emptyset$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$
$A = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$	φραγμένο	$\{0\}$	$A \cup \{0\}$	A	$A \cup \{0\}$

Πίνακας 1: Μερικά παραδείγματα συνόλων με τις τοπολογικές ιδιότητές τους.